



**Titre:** Commande prédictive désynchronisée pour le contrôle d'une  
Title: grande population de systèmes thermostatiques

**Auteur:** Gabriel Laparra  
Author:

**Date:** 2019

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Laparra, G. (2019). Commande prédictive désynchronisée pour le contrôle d'une  
Citation: grande population de systèmes thermostatiques [Mémoire de maîtrise,  
Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/3842/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/3842/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Guchuan Zhu  
Advisors:

**Programme:** Génie électrique  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Commande prédictive désynchronisée pour le contrôle d'une grande population  
de systèmes thermostatiques**

**GABRIEL LAPARRA**

Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
Génie électrique

Avril 2019

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Commande prédictive désynchronisée pour le contrôle d'une grande population  
de systèmes thermostatiques**

présenté par **Gabriel LAPARRA**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Yvon SAVARIA**, président

**Guchuan ZHU**, membre et directeur de recherche

**Roland MALHAMÉ**, membre

## DÉDICACE

*À Eliane Bernard et Jeannine Laparra . . .*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur d'étude Prof. Guchuan Zhu, ainsi que les membres du jury Prof. Yvon Savaria et Prof. Roland Malhamé, je remercie également toutes les personnes ayant contribué à la réussite de mon projet de recherche.

J'ai une pensée particulière pour Pierre Daligault et Vincent Dabin pour leur présence quotidienne à mes côtés et qui ont rendu cette expérience unique.

Un grand merci à mes parents et à mon frère pour votre soutien et grâce à qui j'ai fait les études que je n'aurais jamais imaginées.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur la modélisation et sur le contrôle d’une grande population de systèmes thermostatiques (TCLs) contrôlés individuellement par une commande prédictive. Le contrôle d’une grande population de systèmes offre beaucoup d’opportunités telles que le contrôle en fréquence, le suivi de charges, l’équilibrage énergétique qui peut contribuer à l’amélioration de la stabilité du réseau électrique. Les TCLs sont aussi un moyen d’absorber la production fluctuante d’énergie renouvelable générée par des éoliennes, fermes de panneaux solaires. De plus, la plupart des TCLs, comme les chauffages, les climatiseurs, les chauffe-eaux, les réfrigérateurs, ont une consommation d’énergie flexible et élastique en termes de performances. Les TCLs sont considérés comme des éléments importants pour gérer la régulation de la charge, et plus particulièrement peuvent jouer un rôle majeur pour réduire la consommation de pointe et combler les creux de consommation. Ils sont aussi des éléments d’ajustement dans le cadre d’une tarification dynamique de l’énergie dans un réseau électrique intelligent. Le contrôle d’une grande population de systèmes thermostatiques est un problème qui est abordé depuis longtemps et qui continue d’attirer l’attention des chercheurs dans la littérature actuelle.

Un des défis majeurs du contrôle d’une grande population de TCLs est la synchronisation des appareils entre eux. Un tel phénomène peut apparaître après une panne de courant, et cela implique des pics de puissance et des oscillations de puissance dans le réseau. Pour aborder ce problème, ce mémoire développe deux méthodes décentralisées qui vont hétérogénéiser individuellement le processus de prise de décision des MPC. Ces deux méthodes consistent à ajouter un délai aléatoire dans la trajectoire de référence et pénaliser aléatoirement la fonction objectif du MPC. Ces méthodes ont été validées dans le contexte du contrôle des ventilateurs de serveurs dans les centres de données. Typiquement, un centre de données est construit à des fins commerciales et abritent des centaines voire des milliers d’étagères pour stocker les serveurs informatiques, qui elles-mêmes peuvent contenir des dizaines de serveurs, ce qui représente une grande population homogène de TCLs. Un modèle thermique dynamique permet de représenter le comportement thermique à l’intérieur des serveurs, et un contrôleur MPC décentralisé permet le contrôle de la température de ceux-ci. Pour caractériser la désynchronisation des TCLs contrôlés par MPC, un modèle composé d’une paire d’équations de transport semi-linéaires couplées est utilisé, en plus des simulations de Monte-Carlo. Les simulations numériques montrent que le comportement global obtenu grâce à cette paire d’équations différentielles correspond aux résultats générés par les simulations de Monte-Carlo. Ceci confirme la validité de l’approche utilisée.

Le modèle PDE a été étendu aux populations hétérogènes de TCLs contrôlées par MPC,

dont le comportement est décrit par une paire d'équations couplées de Fokker-Planck. Les paramètres de ce modèle PDE sont basés sur les simulations de Monte-Carlo réalisées. Par la suite la technique de linéarisation entrée-sortie a été utilisé pour contrôler la population de TCLs. Pour évaluer le nouveau contrôleur des simulations ont été menées sur une population de climatiseurs qui a déjà été étudiée dans la littérature. Les résultats obtenus confirment la validité et les performances de la méthode proposée.

## ABSTRACT

This thesis addresses the modeling and control of large populations of thermostatically controlled loads (TCLs) operated by model predictive control (MPC) schemes at the level of each TCL. Aggregates of large populations of TCLs can be managed to offer auxiliary services, such as frequency control, load following, and energy balancing, which can contribute to maintaining the overall stability of power networks. TCLs can also provide a means for absorbing the fluctuations of renewable energy generated by, e.g., wind turbines and solar photovoltaic plants. Moreover, due to the fact that most of the TCLs, including space heaters, air conditioners, hot water tanks, and refrigerators, exhibit flexibilities in power demand for their operation and elasticities in terms of performance restrictions, they are considered to be one of the most important Demand Response (DR) resources that can provide such features as power peak shaving and valley filling and enable dynamic pricing schemes in the context of the Smart Grid. Indeed, control of aggregated TCL populations is a long-time standing problem, which continues to attract much attention in the recent literature.

A critical issue in the operation of a large population of TCLs is the occurrence of synchronization due to the phenomenon of cold load pickup, which may result in high power demand peaks and load oscillations. To tackle this problem, this thesis developed two fully decentralized schemes that would randomize the decision-making process of the MPC individually by each TCL, namely adding random delays in reference signal and extra penalizations on MPC objective functions. The proposed control schemes are validated in the context of the operation of fans in server enclosures in datacenters. Typically, data centers are built from general purpose commercially available off-the-shelf (COTS) processors. A data center may have hundreds or even thousands of server racks; each may host several tens of server enclosures, which represents a large population of homogenous TCLs. The thermal dynamics of the fans has been established, and a decentralized MPC control scheme has been designed for the control of a large population of fans. To characterize desynchronized MPC-based TCLs control schemes, a model governed by a pair of coupled semi-linear transport equations for describing the dynamic behavior of the population has been developed, in addition to Monte-Carlo simulations. Numerical simulation studies show that the aggregate behavior derived from this partial differential equation (PDE) model fits well with the results generated by the Monte-Carlo simulation. This confirmed the validity of the proposed approach.

The PDE aggregate model has been further extended to heterogeneous TLC populations operated by MPC schemes, which are governed by a pair of Fokker-Planck equations coupled through the actions in the domain. The parameter of this PDE model has been estimated



based on the data generated by Monte-Carlo simulations. The technique of input-output feedback linearization is used in the design of aggregate power control, which leads to a non-linear system in closed loop. To evaluate the developed control scheme and illustrate the behavior of the system, a simulation study has been conducted on a benchmark problem, corresponding to a population of air-conditioners, which has been used in the validation of different solutions in the literature. The results confirmed the validity and the performance of the proposed method.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xi
LISTE DES FIGURES . . . . .	xii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 2 COMMANDE PRÉDICTIVE D'UNE GRANDE POPULATION DE SYSTÈMES THERMIQUES ET ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA POPULATION PAR ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES . . .	4
2.1 Revue de littérature . . . . .	4
2.1.1 Consommation d'énergie dans les centres de données . . . . .	5
2.1.2 Fonctionnement de la commande prédictive et méthodes de désynchro- nisation . . . . .	12
2.1.3 Modélisation des équations aux dérivées partielles pour les systèmes thermostatiques . . . . .	15
2.2 Objectifs et méthodologie . . . . .	16
2.2.1 Objectifs . . . . .	16
2.2.2 Méthodologie et contributions . . . . .	18
CHAPITRE 3 MODÈLE THERMIQUE DYNAMIQUE . . . . .	20
3.1 Modèle thermique global . . . . .	20
3.2 Modèle thermique décentralisé . . . . .	23
3.3 Modèle thermique pour commande prédictive . . . . .	24

CHAPITRE 4	DÉSYNCHRONISATION DE SYSTÈMES PAR CONTRÔLE AVEC COMMANDE PRÉDICTIVE . . . . .	25
4.1	Modèle de Commande prédictive pour Systèmes indépendants . . . . .	25
4.2	Mécanismes de contrôle et de désynchronisation . . . . .	26
4.2.1	Délai dans l'état de référence . . . . .	26
4.2.2	Pénalisation supplémentaire sur l'effort de contrôle . . . . .	28
4.3	Validation des mécanismes de désynchronisation par simulations de Monte-Carlo	30
CHAPITRE 5	MODÈLE D'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES POUR AGRÉ- GATION DE CHARGE D'UNE LARGE POPULATION DE SYSTÈMES THERMO- STATIQUES CONTRÔLES PAR COMMANDE PRÉDICTIVE . . . . .	39
5.1	Modèle agrégé d'équation aux dérivées partielles . . . . .	39
5.2	Implémentation du modèle agrégé d'équation aux dérivées partielles . . . . .	43
5.3	Modèle pour une population hétérogène . . . . .	48
5.3.1	Simulation et identification du modèle hétérogène . . . . .	52
5.3.2	Estimateur du coefficient de diffusion . . . . .	54
5.4	Contrôleur supérieur pour équation aux dérivées partielles . . . . .	63
CHAPITRE 6	CONCLUSION . . . . .	70
RÉFÉRENCES	. . . . .	72

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Paramètres du système . . . . .	31
Tableau 4.2	Moyenne, écart type et dépassement pour chaque simulation . . . . .	36
Tableau 5.1	Moyenne $\mu$ et écart type $\sigma$ de l'erreur entre MPC et PDE pour chaque simulation . . . . .	48
Tableau 5.2	Paramètres du système homogène et hétérogène du modèle de Moura ( [1]) . . . . .	53
Tableau 5.3	Paramètres du système . . . . .	65

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Schéma bloc de la commande prédictive . . . . .	14
Figure 3.1	Échanges thermiques dans un serveur informatique . . . . .	21
Figure 4.1	État de référence du système $x_{ref}$ . . . . .	27
Figure 4.2	Proportion de ventilateurs dans l'état ON dans le cas témoin . . . . .	27
Figure 4.3	$x_{ref}$ pour un échantillon de 6 contrôleurs avec délai . . . . .	29
Figure 4.4	Échantillon de température de 100 systèmes dans le cas témoin . . . . .	32
Figure 4.5	Échantillon de température de 100 systèmes dans le cas avec 2,5 unités de temps de délai dans la consigne . . . . .	32
Figure 4.6	Température de 100 contrôleurs avec un délai de 5 unités de temps dans la consigne . . . . .	33
Figure 4.7	Température de 100 contrôleurs avec une pénalisation aléatoire de la matrice $R$ . . . . .	33
Figure 4.8	Température de 100 contrôleurs avec une pénalisation aléatoire de la matrice $R$ et un délai de 2,5 unités de temps dans la consigne . . . . .	34
Figure 4.9	Température de 100 contrôleurs avec une pénalisation aléatoire de la matrice $R$ et un délai de 5 unités de temps dans la consigne . . . . .	34
Figure 4.10	Proportion de systèmes dans l'état ON au cours du temps pour les méthodes citées . . . . .	35
Figure 4.11	Proportion de systèmes dans l'état ON au cours du temps pour les méthodes citées . . . . .	35
Figure 5.1	Distribution des systèmes dans l'état ON et OFF. . . . .	41
Figure 5.2	Flux entrant et sortant sur un segment de température infinitésimal. . . . .	41
Figure 5.3	Exemple de fonction $\delta(x, t)$ . . . . .	44
Figure 5.4	Surface solution de (5.17) avec l'entrée 5.3. . . . .	46
Figure 5.5	Solution partielle de (5.17) avec l'entrée 5.3. . . . .	46
Figure 5.6	Surface solution de (5.17) avec l'entrée 5.3. . . . .	47
Figure 5.7	Solution partielle de (5.17) avec l'entrée 5.3. . . . .	47
Figure 5.8	Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas témoin. . . . .	49
Figure 5.9	Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 2,5 unités de temps. . . . .	49
Figure 5.10	Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 5 unités de temps. . . . .	50

Figure 5.11	Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec pénalisation dans la commande. . . . .	50
Figure 5.12	Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 2,5 unités de temps et pénalisation dans la commande. . . . .	51
Figure 5.13	Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 5 unités de temps et pénalisation dans la commande. . . . .	51
Figure 5.14	Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état ON pour une population homogène. . . . .	55
Figure 5.15	Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état OFF pour une population homogène. . . . .	55
Figure 5.16	Erreur moyenne entre le modèle PDE et MPC en fonction du coefficient de diffusion pour une population homogène. . . . .	56
Figure 5.17	Puissance agrégée par les modèles MPC et PDE de l'ensemble de la population homogène. . . . .	56
Figure 5.18	Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état ON pour une population hétérogène. . . . .	57
Figure 5.19	Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état OFF pour une population hétérogène. . . . .	57
Figure 5.20	Erreur moyenne entre le modèle PDE et MPC en fonction du coefficient de diffusion pour une population hétérogène. . . . .	58
Figure 5.21	Puissance agrégée par les modèles MPC et PDE de l'ensemble de la population hétérogène. . . . .	58
Figure 5.22	Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état ON pour une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande. . . . .	59
Figure 5.23	Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état OFF pour une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande. . . . .	59
Figure 5.24	Erreur moyenne entre le modèle PDE et MPC en fonction du coefficient de diffusion pour une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande. . . . .	60
Figure 5.25	Puissance agrégée par les modèles MPC et PDE de l'ensemble de la population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande. . . . .	60

Figure 5.26	Puissance consommée et puissance de référence normalisée pour les 1000 TCLs . . . . .	67
Figure 5.27	Changements de commande dus au contrôleur de Fokker-Planck . . .	67
Figure 5.28	Erreurs dues au contrôleur de Fokker-Planck . . . . .	68
Figure 5.29	Température de référence pour les contrôleurs MPC . . . . .	68
Figure 5.30	Température d'un TCL . . . . .	69
Figure 5.31	Température de 100 TCLs . . . . .	69

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

MPC	Model Predictive Control
PDE	Partial Differential Equation
QoS	Quality of Service
CFD	Computational Fluid Dynamic
ASHRAE	American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers, Inc.
CRAC	Computer Room Air Conditioning
CTM	Compact Thermal Models
ARMA	AutoRegressive Moving Average
ZOH	Zero-Order Hold



## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

L'automatique est une science du contrôle des systèmes dynamiques. Les premiers exemples de contrôle des systèmes remontent à l'antiquité, mais c'est principalement au XIX<sup>e</sup> siècle que cette science se développe. Des systèmes de contrôle existent déjà, mais c'est en 1868 que James Clerk Maxwell publie le premier article mathématique sur la théorie du contrôle ([2]). L'apport de la machine à vapeur lors de la révolution industrielle a considérablement accru le besoin de contrôle des machines et maintenant la théorie est largement répandue. Son utilisation se fait dans une variété de domaines très importante qui peut aller des systèmes les plus simples, contrôle allumé/éteint, aux plus complexes, contrôle avec algorithmes à variables multiples. Son objectif est d'automatiser le fonctionnement des systèmes et d'en améliorer les performances c'est pourquoi elle est si intéressante pour les scientifiques et pour les entreprises dans un marché concurrentiel. Dans ce contexte, l'accent est mis sur le contrôleur à commande prédictive, en anglais "model predictive control (MPC)", qui est souvent utilisé pour le contrôle de systèmes complexes tout en permettant de satisfaire tout un lot de contraintes.

La méthode MPC a été inventée en 1978 par Jacques Richalet ([3]) et a été généralisée par David W Clarke en 1987 ([4]), c'est une méthode légèrement plus complexe que la méthode proportionnelle, intégrale, dérivée (PID) ou placement de pôles, mais très facile à implémenter sur un ordinateur. En comparaison des méthodes PID ou placement de pôles, cette méthode est plus robuste, élimine les décalages et n'est pas affectée par les systèmes surparamétrés. L'utilisation de cette méthode est préférable pour les systèmes à grande constante de temps comme les modèles thermiques qui ont une dynamique relativement lente. En effet pour contrôler de manière précise le système, il faut que la constante de temps soit grande devant le temps d'échantillonnage de la commande prédictive. Cette méthode est utilisée dans l'industrie depuis les années 1980 et est aujourd'hui très populaire, car elle est relativement facile à comprendre et parce qu'elle est très efficace. Elle utilise un modèle dynamique du système à contrôler et optimise la commande du système pour un horizon de temps fini. L'objectif du modèle est de représenter le plus fidèlement le comportement dynamique du système. Les variables sur lesquelles le contrôleur ne peut influencer sont les perturbations du modèle. Il est courant que la dynamique du système soit non linéaire; en pratique on essaie dans un premier temps de se rapporter à un système linéaire, dans ce cas il existe des méthodes permettant de linéariser le modèle autour de son point de fonctionnement. Si la linéarisation n'est pas suffisamment précise, des méthodes de résolution non linéaire peuvent être utilisées. La précision du modèle est importante afin d'avoir une solution théorique la

plus proche possible du système réel. En effet le contrôleur utilise les mesures qui sont effectuées en temps réel afin de calculer la solution optimale. La solution est donc calculée pour un temps fini, mais seulement la première itération de la solution est implémentée et le processus se répète, basé sur la nouvelle fenêtre de temps. Comme cette fenêtre de temps est généralement plus courte que la simulation totale, on obtient une solution sous-optimale. Le principal avantage du contrôleur MPC est sa capacité à anticiper les événements et à agir en conséquence tout en satisfaisant les lots de contraintes appliquées sur les variables.

Dans le cadre de ce projet de recherche, le contrôleur MPC est appliqué aux systèmes de refroidissement des serveurs des centres de données afin de réduire sa puissance maximale consommée. L'utilisation croissante des données implique une plus grande utilisation d'énergie, les centres de données et les infrastructures de télécommunication en sont très énergivores, et la consommation d'électricité en est le principal coût de fonctionnement. Pour les entreprises, la facture énergétique est divisée en deux parties (du moins au Québec), l'une concerne la consommation d'énergie et l'autre concerne le pic de puissance utilisée au cours de la période de facturation. Le pic de puissance est fortement pénalisé par les fournisseurs d'énergie, car il leur est plus compliqué de répondre à de fortes variations de puissance plutôt qu'une consommation constante. De plus, il est également intéressant de réduire la puissance maximale consommée par le centre de données, car celui-ci est dimensionné pour répondre aux pics de consommation qui arrivent seulement quelques minutes par jour. En réduisant le pic de consommation, il est donc possible de faire des économies au-delà de la simple facture énergétique. Ici, l'objectif est de réduire le pic de consommation des centres de données sans affecter la performance globale de celui-ci. L'accent est mis sur les infrastructures de refroidissement des centres de données, l'objectif est de réduire la puissance maximale consommée tout en respectant les contraintes thermiques afin d'assurer un haut niveau de performance. Les serveurs sont refroidis grâce à des ventilateurs qui envoient de l'air frais sur les composants électroniques dissipant de la chaleur par effet Joule. Un contrôleur MPC est adapté dans ce cas, car la constante de temps du système étudié est grande. C'est un système à entrées multiples et sorties multiples, en anglais "multiple inputs-multiple outputs (MIMO)", il nécessite de respecter les contraintes thermiques ; enfin la fonction objectif peut être modifiée selon l'objectif désiré. Les méthodes développées durant cette maîtrise sont décentralisées et peuvent être utilisées en plus des autres méthodes appliquées aux systèmes informatiques. Ces méthodes n'impactent à aucun moment les performances du centre de données.

Enfin, les méthodes de contrôle développées pour les ventilateurs peuvent être généralisées à tous les systèmes thermostatiques, en anglais "thermostatically controlled loads (TCLs)", tels que le chauffage, chauffe-eau, frigidaires, etc. en utilisant un modèle d'équation aux dérivées partielles, en anglais "partial differential equations (PDE)" afin, dans un premier temps, de

représenter cette agrégation de charge et dans un second temps de les contrôler. Le modèle PDE a déjà été utilisé pour représenter des charges contrôlées par thermostat, il est ici adapté à ces systèmes contrôlés par un contrôleur MPC.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le chapitre 2 est consacré à la revue de littérature concernant, la consommation d'électricité dans les centres de données, les méthodes de désynchronisation de charges par MPC et enfin les modèles PDE. Le Chapitre 3 aborde le sujet des échanges thermiques dans un centre de données. Le chapitre 4 développe deux méthodes décentralisées qui permettent de contrôler une large population de TCL tout en la désynchronisant. Le chapitre 5 développe un modèle PDE adapté aux larges populations de charges contrôlées par MPC. Le chapitre 6 permet de conclure sur les résultats de simulation ainsi que les contributions de cette maîtrise. Enfin, les résultats obtenus ont permis de soumettre deux articles. Ces articles sont présentés en Annexes.

## CHAPITRE 2    COMMANDE PRÉDICTIVE D’UNE GRANDE POPULATION DE SYSTÈMES THERMIQUES ET ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA POPULATION PAR ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Ce mémoire introduit une revue de littérature afin de faire un état de l’art concernant les différentes problématiques abordées dans l’introduction. Cette revue de littérature aborde trois thèmes qui sont : la caractérisation de la consommation énergétique des différents systèmes d’un centre de données, le contrôle et la désynchronisation d’une grande population de contrôleurs MPC et l’analyse par le modèle PDE de la population de contrôleurs.

En nous basant sur cette revue de littérature, nous pouvons donc formuler les objectifs et les contributions de ce mémoire.

### 2.1    Revue de littérature

La réduction des pics de consommation de puissance pour différents appareils est un des enjeux majeurs des réseaux électriques intelligents ([5]), et il existe une riche littérature sur ce sujet. Dans ce projet, nous nous intéressons plus particulièrement à un type de systèmes appelé : charges thermostatiques. Ce sont des systèmes tel un chauffage, un climatiseur, un réfrigérateur, un ballon d’eau chaude, etc. Ce sont des systèmes dont la température appartient à une certaine plage et dont le système de contrôle est soit allumé, soit éteint afin de garder la température du système à l’intérieur de cette plage de température. Ces systèmes thermostatiques ont été beaucoup étudiés, car ils permettent une certaine flexibilité vis-à-vis de la réponse à la demande électrique (pour ne citer que quelques articles, [6–13]). En effet en faisant varier leur température de fonctionnement ces systèmes thermostatiques peuvent agir comme des systèmes permettant de stocker ou de restituer de l’énergie. Tout ce qui est développé dans ce mémoire est adaptable à l’ensemble des systèmes thermostatiques. Plus précisément, dans ce mémoire, nous nous intéressons aux systèmes de réfrigération d’un centre de données. Les raisons de derrière ce choix sont expliquées dans cette revue de littérature. Celle-ci est divisée en trois parties afin de distinguer les différentes notions présentées. La première partie détaille les différentes sources de consommation d’énergie dans un centre de données et les techniques déjà développées ou utilisées qui permettent de réduire la consommation d’énergie. Cette partie mène à la création d’un modèle thermique d’un serveur informatique afin de baser le contrôle de température de fonctionnement des composants de celui-ci. La seconde partie donne une explication du fonctionnement théorique du contrôleur

MPC et illustre celui-ci en montrant des exemples d'utilisation du contrôleur. Cette seconde section aborde aussi le problème de synchronisation qui apparaît lors du contrôle d'une large population homogène de systèmes. Des exemples de méthodes de désynchronisation sont présentés dans cette partie. Enfin, la dernière section s'intéresse à la modélisation grâce aux PDE des systèmes thermostatiques. Le modèle PDE est intéressant pour réaliser des contrôleurs de niveau supérieur. Un contrôleur de niveau supérieur permet ainsi de communiquer avec les contrôleurs de niveau inférieur afin d'atteindre un objectif global pour l'ensemble de la population.

### 2.1.1 Consommation d'énergie dans les centres de données

La principale raison qui nous a poussés à étudier les centres de données est qu'un centre de données est l'une des infrastructures les plus consommatrices d'énergie ([14], [15]). De plus la dissipation thermique des composants électroniques est si importante que celle-ci freine le développement de ceux-ci. En effet, le gain de performance d'une éventuelle amélioration est souvent négligeable devant l'effort de consommation que cette amélioration entraîne. Ces infrastructures sont énergivores et des améliorations sont possibles pour les rendre plus économes en énergie. Il est estimé que les centres de données consomment 1.4% de l'électricité mondiale ([16]). De plus, le taux de croissance annuel composé du secteur est de 4.4% de 2007 à 2012, ce qui est significativement supérieur au taux de croissance annuel de l'électricité mondiale que l'on projette d'être de 2.1% entre 2012 et 2040 ([17, 18]). Dans les centres de données, les systèmes de refroidissement représentent environ 40% de la consommation totale d'électricité ([19]). L'électricité représente environ 15% des coûts de fonctionnement d'un centre de données ([20]), il est financièrement intéressant de gérer de manière efficace cette consommation d'électricité.

Les rejets de CO<sub>2</sub> associés à une telle consommation sont équivalents à ceux de l'industrie aéronautique ([21]). De plus, les serveurs informatiques de la plupart des entreprises utilisent en général entre 10 et 50% de leurs capacités de calcul ([22]), et ceci implique donc une grande quantité d'énergie gaspillée, mais aussi une perte de compétitivité pour les entreprises. En effet, les processeurs étant conçus pour fonctionner au maximum de leur capacité, il résulte que l'efficacité énergétique à régime réduit est comprise entre 20 et 70%. D'après Bianzino ([23]) les entreprises utilisent de plus en plus la consolidation de ressources comme moyen de réduire les coûts et également pour maximiser le retour sur investissement des centres de données. Les serveurs virtuels sont un moyen d'atteindre la consolidation de ressources. Cette méthode permet de diviser un serveur en plusieurs plus petits serveurs virtuels ([24]). Cela permet une meilleure utilisation des ressources du serveur et aussi permet de ralentir la construction de nouveaux centres de données, en permettant de faire fonctionner à pleine

capacité certains serveurs pendant que d'autres sont éteints. Une illustration de l'utilité des serveurs virtuels est donnée par Su et Pantazoglou ([25,26]). Lin ([27]) propose une version dynamique de cette méthode afin d'obtenir des résultats optimaux au cours du temps. L'étude ([28]) montre une liste exhaustive de méthodes de gestion de ressources faisables dans un centre de données. De plus, il est important de distinguer le problème de forte consommation d'énergie et le problème de pic de consommation de puissance. Le problème de grosse consommation d'énergie peut se résumer à : plus la consommation d'énergie est importante, plus la facture électrique est importante, l'énergie est le principal coût de fonctionnement d'un centre de données. Le problème de pic de puissance est différent, car il aborde le sujet des serveurs informatiques sous-utilisés. En effet, les infrastructures sont construites afin de répondre au pic de puissance consommé, ce pic de puissance ne se produit que très rarement en réalité. Dans de tels systèmes le coût du sur dimensionnement est significatif et inclut des dépenses pour augmenter les capacités des systèmes de refroidissement, des génératrices électriques, et ainsi de suite. Minimiser la consommation totale d'énergie est bien, mais il est tout aussi important de contrôler la puissance consommée ([29]). Les méthodes permettant de réduire la puissance/l'énergie consommée peuvent être décrites comme suit :

- réduire la puissance/l'énergie consommée en planifiant l'utilisation des composants, c'est-à-dire en les allumant seulement lorsque c'est nécessaire ([29] [30] [31] [32]). Les méthodes de gestion de charge de calcul peuvent aussi apparaître dans cette section, car allumer/éteindre un serveur implique de la gestion de charge de calcul ([24] [33]). La gestion de charge de calcul est aussi faisable de manière géographique. C'est-à-dire que les calculs peuvent être réalisés par des centres de données où le service est sous-utilisé ([34]). Les algorithmes peuvent avantager les utilisateurs qui consomment moins d'énergie comme cela est mentionné par Georgiou ([35]), des algorithmes d'optimisation de vitesse d'exécution des serveurs existent ([36]) ;
- réguler la puissance/énergie dissipée par les composants grâce aux techniques d'ajustement dynamique de la tension, en anglais "Dynamic voltage and frequency scaling (DVFS)", c'est-à-dire réduire la fréquence de fonctionnement des processeurs ou leur tension lorsqu'ils ne sont pas pleinement utilisés ([29] [30] [37] [38] [32]) ;
- optimiser la puissance/énergie consommée des ventilateurs des serveurs/systèmes de refroidissement tout en respectant les contraintes thermiques des composants internes (processeurs, carte mémoire [30]).

Il est intéressant de noter qu'une solution optimale serait une combinaison de ces trois méthodes afin d'obtenir les meilleurs résultats possible. Ces méthodes ont leurs avantages et leurs inconvénients, ceux-ci sont résumés ci-dessous :

### 1. Allumer/éteindre les composants du réseau

- Avantages : Cela permet de réduire la consommation des composants en veille. Si un composant n'est pas utilisé, mais est en veille alors celui-ci est éteint. Cela permet une utilisation maximale des serveurs, car tous ceux qui sont allumés travaillent. Des algorithmes de réallocation de tâches sont nécessaires afin d'éteindre des serveurs et de faire fonctionner les autres à pleine capacité. La puissance consommée par un serveur peut être représentée comme suit :

$$P_{\text{serveur}} = P_{IT} + P_{\text{ventilateurs}},$$

où  $P_{\text{serveur}}$  est la somme de  $P_{IT}$ , qui représente la consommation de puissance des composants informatiques, et de  $P_{\text{ventilateurs}}$ , qui représente la consommation de puissance des systèmes de refroidissement dans un serveur.

- Inconvénients : Les changements d'état doivent être effectués seulement lorsque la période de veille est suffisamment longue pour compenser les périodes de transition d'un état à l'autre. Les prédictions de transition efficace doivent être effectuées en accord avec les données historiques collectées ou bien un modèle comme indiqué par Urgaonkar ([31]). Le principal problème de cette méthode est que le temps d'allumage d'un composant doit être le plus bref possible afin de faire du contrôle dynamique, actuellement le temps d'allumage d'un serveur est autour de la minute ce qui rend le contrôle dynamique inefficace.

### 2. Méthodes DVFS

- Avantage : La consommation de puissance d'un processeur dépend de la fréquence de calcul, qui est une fonction de la tension d'entrée. L'objectif est de dynamiquement ajuster l'horloge fréquentielle du processeur afin d'induire une réduction de tension nécessaire. Cette méthode est très efficace pour réduire la consommation de puissance. La puissance consommée par un processeur est la suivante :

$$P_{CPU} = P_{\text{dynamique}} + P_{\text{statique}} + P_{\text{fuite}},$$

$$P_{\text{dynamique}} = CV^2f,$$

où  $C$  est la capacité,  $V$  la tension et  $f$  la fréquence.

- Inconvénients : Cette méthode est seulement intéressante pour les processeurs, car ce sont les seuls composants pouvant fonctionner à vitesse réduite. De plus, cette méthode réduit les performances des processeurs, et une prédiction de la charge de calcul doit être faite en fonction des données historiques ou d'un modèle.

### 3. Gestion basée sur la température interne et méthodes de programmation de tâches

- Avantages : L'avantage de ces méthodes est de gérer les systèmes de refroidissement des serveurs en respectant les contraintes thermiques des composants électroniques. Le flux d'air nécessaire au refroidissement des serveurs est souvent surestimé ([21]), donc une gestion des systèmes de refroidissement est une façon efficace de réduire la consommation d'énergie sans affecter les performances du serveur, la qualité de service, en anglais "quality of service (QoS)", n'est donc pas impactée. Dans les grands centres de données, la décision d'affectation de tâches sur des serveurs spécifiques affecte significativement la dissipation d'énergie et la consommation d'énergie. En effet, une mauvaise affectation de tâche peut provoquer une augmentation de dissipation thermique et donc en des besoins de refroidissement plus importants. Pour atteindre l'efficacité énergétique, une affectation des charges de travail induit une réduction de la consommation d'énergie ([30]).
- Inconvénient : Il nécessite un modèle validé par la dynamique des fluides, en anglais "computational fluid dynamics (CFD)". Il nécessite aussi un modèle prédictif des charges de travail.

Parce qu'il est très compliqué d'estimer les conséquences d'une baisse de QoS, la suite de cette revue de littérature se concentre sur la gestion électrique basée sur un modèle thermique d'un centre de données. De plus, les systèmes de refroidissement sont les plus gros consommateurs de puissance parmi les composants non électroniques d'un centre de données ([39]).

Différents types de modèles thermiques peuvent être développés, trois approches principales existent ([40]). La première est un modèle analytique basé sur les lois de mécanique des fluides et des propriétés physiques des centres de données. La deuxième approche utilise un modèle prédictif complexe qui utilise des techniques sophistiquées telles que l'intelligence artificielle pour prédire la température à différents endroits du centre de données. La troisième approche utilise des calculs de mécanique des fluides. Même si cela produit des résultats plus précis, cette approche est trop lente pour être implémentée, car elle implique trop de calculs. Les deux premiers modèles sont couramment utilisés dans la littérature et peuvent être validés par CFD ou peuvent être calibrés en temps réel par des capteurs de température. Les modèles thermiques peuvent être élaborés à différents niveaux, les modèles suivants sont établis en utilisant les deux premières approches :

- Des modèles thermiques de haut niveau, s'intéressant au centre de données dans son ensemble, systèmes de refroidissements inclus, l'environnement extérieur, etc. Des modèles thermiques qui ont pour but de minimiser la quantité d'énergie consommée par les systèmes de refroidissement et réduire le pic de puissance. Cependant, ces modèles ne permettent pas d'optimiser la consommation des composants électroniques. L'article de Hadid ([41]) construit un modèle thermique de centre de données afin de



définir le point optimal de fonctionnement du centre entre 18 et 27 ° C définis par l'ASHRAE (American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers). Un modèle thermique global est capable d'éviter les surchauffes des processeurs et d'utiliser de façon optimale les ventilateurs des serveurs comme expliqués par Mousavi ([42] et [43]). Dans le contrôle de systèmes en réseaux des communications doivent être effectuées entre les capteurs et le contrôleur. Mais dans le but de réduire ces communications, des estimations sont effectuées et l'article de Weerakkody ([44]) évalue le meilleur ratio entre communication et bonne estimation du système.

- Modèles thermiques au niveau des unités de chauffage, ventilation et climatisation, en anglais "computer room air conditioner (CRAC)". Environ 40 % de la quantité totale d'énergie consommée est dévolue au refroidissement des centres de données. Pour chaque Watt utilisé pour les calculs des serveurs, entre 0,5 et 1 Watt supplémentaire est consommé pour le refroidir ([39]). La puissance dynamique est de la forme :

$$P_{CRACu} = P_{veille} + P_{dynamique}f^3 \quad (2.1)$$

où  $f$  est la vitesse de rotation des ventilateurs (compris entre 0 et 1)  $P_{veille}$  et  $P_{dynamique}$  représentent les états en veille et allumé des unités CRAC.

- Modèle thermique du niveau des serveurs informatiques. La consommation d'énergie des ventilateurs des serveurs correspond à 20 et 30 % de l'énergie consommée par un serveur. De plus, la puissance consommée est une fonction cubique de la vitesse de rotation. Ainsi, refroidir de manière trop importante les serveurs implique une inefficacité énergétique comme cela est indiqué par Lucchese et Dayarathna ([21] et [39]).

$$P_{ventilateur} \propto v_{ventilateur}^3,$$

où  $P_{ventilateur}$  est la puissance consommée par les ventilateurs et  $v_{ventilateur}$  est leur vitesse.

- Enfin, des modèles des systèmes thermiques et systèmes informatiques peuvent être couplés. Ces genres de modèles considèrent deux réseaux en interaction l'un avec l'autre ([45]). Un modèle agrégé peut diminuer les performances du contrôleur dû à la quantité de variables à optimiser.

Un contrôleur MPC permet d'obtenir un résultat optimal afin d'atteindre l'efficacité énergétique comme montré par Mencagli et Vanneschi ([46]) et donne souvent de meilleurs résultats que les méthodes d'intelligence artificielle. De plus, un modèle validé par CFD ou par mesures est important afin de mieux représenter la dynamique du système. Par exemple, Sun

( [40]) utilise un modèle spatio-temporel et la méthode DVFS pour respecter les contraintes thermiques. Cela donne un algorithme très efficace qui surpasse les autres contrôleurs. Cela met en évidence l'importance de prendre en compte toutes les corrélations spatio-temporelles entre les nœuds du réseau. La température est spatialement corrélée grâce à la diffusion thermique et est aussi temporellement corrélée par l'inertie thermique.

Dans les centres de données, la température joue un rôle clé. En effet, une augmentation de température au-delà d'un certain seuil amène à un taux d'échec plus important dans les processeurs, un plus gros coût de refroidissement, et mène aussi à une augmentation des fuites de courant. Cela indique qu'une gestion thermique est une façon importante d'optimiser les performances des applications et de réduire la consommation d'énergie. Cette planification thermique se base sur un modèle thermique. Ainsi, cette planification peut être hiérarchiquement organisée avec un objectif, des méthodes de contrôle, des modèles et des méthodes de prédictions et un schéma d'implémentation ( [47]). Un aperçu des différents moyens de faire cette planification thermique est présenté :

### 1. Objectif à optimiser

Il existe un large spectre d'objectifs possibles, ils peuvent être parmi les suivants :

- Maximiser le débit
- Minimiser la consommation de puissance
- Réduire les pics de température
- Maximiser l'efficacité énergétique
- Minimiser la consommation d'énergie
- Minimiser le taux d'échec des processeurs.

En fonction de l'objectif choisi, la fonction objectif est choisie en conséquence. Il est possible de mélanger plusieurs objectifs afin d'avoir une solution équilibrée en fonction des objectifs à atteindre.

### 2. Mécanisme de contrôle

Il y a différentes façons de contrôler un système pour faire de la planification thermique. DVFS est la méthode la plus utilisée d'après les recherches bibliographiques effectuées, la gestion de tâches est aussi souvent utilisée alors que peu d'études ont été faites sur le contrôle des ventilateurs bien que celle-ci représente entre 20 et 30 % de l'énergie consommée par les serveurs.

- contrôle DVFS ( [47] [48]). Comme mentionné plus haut cette méthode vise à contrôler la fréquence de calcul des processeurs afin de réduire leur consommation. Des méthodes asynchrones ( [49]), spatio-temporelles ( [40]), non linéaires ( [50]), en temps réel ( [51]), et dynamique ( [52]) ont été utilisées. Cela permet de faire de grosses réductions d'énergie, mais impacte aussi les performances des processeurs.

- Migration de tâches : Les algorithmes d'allocation de tâches se sont développés depuis l'apparition des processeurs multicœurs ([52]). Leur but est de réduire le gradient de température dans les processeurs. Ils ont moins d'impact sur la consommation d'énergie que la méthode DVFS, mais ils peuvent améliorer les performances globales, une mauvaise allocation de tâche peut diminuer les performances également.
- Séquencement de tâches : L'objectif est de séquencer les tâches afin de les calculer sur différents processeurs. Cela permet d'augmenter les performances et de réduire le gradient de température.
- Contrôle des systèmes de refroidissement ([47]) : Les centres de données dépensent 50 % de leur énergie dans le refroidissement, le contrôle de ces mécanismes de refroidissement n'a pas d'impact sur les performances tant que les contraintes thermiques sont respectées.

### 3. Modélisation et prédiction

Un modèle permet à l'utilisateur de déterminer les paramètres des équations de chaleur. Différents modèles existent, le premier repose sur les transferts de chaleur et la dynamique des fluides, les deux derniers reposent sur des modèles prédictifs afin de déterminer l'état futur du système :

- Modèle thermique couplé est un modèle analytique qui calcul la température à partir de la consommation énergétique. Dans l'article de De Vogelee ([53]) est formulé une équation de chaleur et les solutions associées à la loi de Newton dans les microprocesseurs.
- Modèles autorégressifs et moyenne mobile, en anglais "autoregressive-moving-average model (ARMA)" : étant donné un échantillon stochastique de données, un modèle ARMA peut donner des informations pour prédire les valeurs des prochaines données.
- Les filtres de Kalman sont utilisés pour prédire des systèmes linéaires corrompus par du bruit. Les filtres de Kalman utilisent l'erreur de prédiction pour mettre à jour le système, pour améliorer les prédictions. Cependant, il doit être adapté pour les modèles non linéaires.

### 4. Schémas d'implémentation

Voici une liste de contrôleurs pour permettre le contrôle de température :

- Les simulations sont un outil qui imite un système réel et sur lequel on peut mener des tests.
- Les contrôleurs en boucle ouverte sont des contrôleurs sans retour d'état. L'action de contrôle est indépendante de la sortie du système qui est la variable contrôlée.

- Contrôleur PID ( [52]) fonctionne en boucle fermée et requiert des mesures d'état (c.-à-d. température). Le PID est souvent utilisé dans l'industrie, car il minimise l'erreur avec la cible.
- Contrôleur MPC ( [54]) résout des problèmes soumis à des contraintes et définit l'état optimal pour les prochains états. Le contrôleur calcule la valeur optimale pour les prochaines étapes, mais n'implémente que la première pour le prochain intervalle de temps. Ensuite, le contrôleur observe le comportement du système et recommence son processus d'optimisation ( [55]). Dans l'article de Zanini ( [51]), quatre différents contrôleurs sont testés avec des méthodes DVFS. Ces contrôleurs mènent à différents résultats en fonction de l'objectif.

Ici sont résumés différents outils pour faire de la gestion thermique dans les centres de données. Chaque outil possède ses avantages et ses inconvénients et doit être choisi en fonction de l'objectif à atteindre. Notre objectif étant de réduire la consommation de puissance et d'énergie sans affecter les performances des centres de données, il apparaît donc exclu d'utiliser les méthodes DVFS. Parmi les méthodes présentées ci-dessus, chacune nécessite un bon modèle prédictif et les contrôleurs MPC sont efficaces ( [51], [46]). La gestion de la consommation d'énergie des systèmes de refroidissement peut être faite sur une structure à plusieurs niveaux ( [21]). Durant cette maîtrise, le travail a été réalisé au niveau du contrôle des ventilateurs des processeurs à l'intérieur des serveurs informatiques. Un centre de données contient des centaines, voire des milliers d'étagères à serveurs, contenant elles-mêmes des dizaines de serveurs. Les ventilateurs ont pour objectif de faire circuler l'air à l'intérieur des serveurs informatiques pour maintenir la température de fonctionnement des composants sous une valeur autorisée.

### **2.1.2 Fonctionnement de la commande prédictive et méthodes de désynchronisation**

Le contrôleur MPC est un contrôleur très utilisé dans l'industrie, car il donne de très bons résultats de manière générale. Dans ce projet, nous allons utiliser un contrôleur MPC, car ceux-ci sont bien adaptés à la problématique du contrôle des systèmes thermostatiques, car la dynamique de ceux-ci est assez lente. Comme mentionné dans l'introduction, le contrôleur MPC a été inventé par Jacques Richalet en 1978 ( [3]) et généralisé par David W Clarke en 1987 ( [4]). Sur la base d'un modèle dynamique du système étudié, il permet d'anticiper les événements qui vont survenir afin d'optimiser la réponse en conséquence. Il permet de paramétrer la fonction de l'objectif à atteindre selon les besoins de l'utilisateur et il peut aussi contraindre certaines variables à rester sur une certaine plage pendant la durée de la

simulation. Enfin, c'est une méthode discrète très facile à implémenter sur ordinateur. De manière générale, dans le cas linéaire, le modèle dynamique s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec les contraintes :

$$x_{\min} \leq x(k) \leq x_{\max}, \quad u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \tag{2.3}$$

avec  $k$  l'indice temporel discret. Le contrôleur MPC résout les problèmes de la façon suivante. En supposant qu'une mesure de l'état  $x(t)$  est disponible à l'instant  $t$ , alors le problème d'optimisation est :

$$\min_{U=\{u_1, \dots, u_N\}} J(U, x(t)) = \sum_{k=0}^N [x_{t+k|t}^T Q x_{t+k|t} + u_{t+k|t}^T R u_{t+k|t}],$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq x_{t+k|t} \leq x_{\max}, \quad k = 1, \dots, N, \\ u_{\min} &\leq u_{t+k} \leq u_{\max}, \quad k = 1, \dots, N, \\ x_{t|t} &= x(t), \\ x_{t+k+1} &= Ax_{t+k|t} + Bu(t+k), \quad k = 1, \dots, N, \\ y_{t+k|t} &= Cx_{t+k|t}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Avec  $x_{t+k|t}$  l'état calculé au temps  $t+k$ . Les matrices  $Q$  et  $R$  sont définies semi-positives. Le fonctionnement global du MPC peut être schématisé sur la figure 2.1 où l'on peut voir les différents éléments du MPC interagir entre eux pour finalement donner une consigne au système réel et se calibrer en fonction de la sortie de celui-ci. L'estimateur fournit les futures étapes du système en fonction de l'état actuel du système et des commandes. L'état de référence, au temps  $t$  et aux états futurs, est dicté en général par l'extérieur, puis la différence entre l'état de référence et l'état du système est considéré. La fonction objectif et les contraintes agissent directement sur le solveur.

Dans un centre de données, il existe des milliers, voire des dizaines de milliers de serveurs, ce qui en fait donc une très large population. Dans ce genre de contexte, il est important d'être attentif au problème de synchronisations, d'autant plus que les serveurs dans un centre de données sont quasi identiques, les ventilateurs de ceux-ci peuvent être considérés comme une population homogène. Les effets de synchronisation sur une population homogène sont particulièrement visibles et un changement d'état entraîne donc une oscillation du système, qui ne s'amortit pas dans le temps ([1]). On remarque que les oscillations de puissance sont

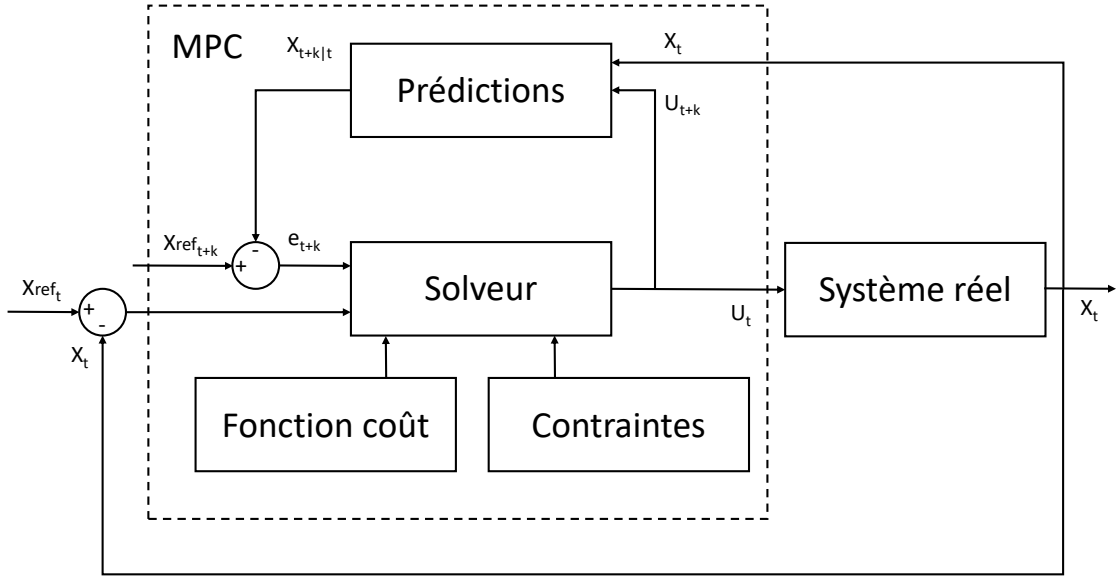


Figure 2.1 Schéma bloc de la commande prédictive

naturellement plus amorties lorsque la population est hétérogène, tandis que lorsque celle-ci est homogène alors les oscillations de puissance sont entretenues. Un des avantages des centres de données est qu'ils sont équipés de réseaux de communication sophistiqués et possèdent une capacité de traitement de données très importante, ce qui rend les méthodes de gestion de puissance facilement implémentables.

L'une des problématiques majeures du contrôle d'une large population de systèmes thermostatiques est le phénomène de *cold load pickup* ([56], [57]), qui résulte en un important pic de consommation de puissance et des oscillations de charges ([58–61]). Ce phénomène intervient et est particulièrement problématique à la suite d'une panne d'électricité. Pendant la durée de la panne, les systèmes thermostatiques ont vu leur température diminuer ou augmenter, selon le type de systèmes, et sortir des plages de température autorisées. Les systèmes thermostatiques sont donc soudainement tous dans l'état ON après la coupure de courant et donc un phénomène de synchronisation des systèmes apparaît. La synchronisation des systèmes entraîne alors des oscillations importantes de la puissance consommée par cette population. Une solution afin d'atténuer ce phénomène de synchronisation au sein d'une population de systèmes thermostatiques est d'introduire des mécanismes permettant une désynchronisation des opérations de changement d'état. Pour une population des systèmes thermostatiques

contrôlée par un thermostat, les méthodes de désynchronisation peuvent consister à ajouter des actions aléatoires sur le thermostat. Ces actions peuvent être de faire varier la plage de température admissible ([62, 63]), interrompre de manière aléatoire les cycles d'état (ON et OFF) ([63, 64]), contrôler le taux de commutation ([65]), etc. Il existe également des solutions pour éviter les pics de consommation de puissance d'une population de systèmes thermostatiques contrôlée par MPC. Ce sont d'ailleurs ces techniques qui sont les plus utilisées en pratique. La désynchronisation peut être obtenue par le contrôle global de l'ensemble de la population, comme la programmation des opérations des systèmes thermostatiques ([6, 66]), le contrôle supervisé ([13, 67]) et par l'introduction de suivi de trajectoire déphasée à un haut niveau de contrôleur MPC ([68]). Cependant, au vu du fait que ces méthodes sont centralisées, elles ne sont pas vraiment applicables dans le cas d'une large population de systèmes thermostatiques. En effet, les calculs permettant de trouver une solution optimale au phénomène de désynchronisation seraient contre-productifs et il pourrait y avoir des erreurs de transmission dans le réseau de communication. C'est pour ces raisons que l'on privilégie plutôt des méthodes de désynchronisation décentralisées. Inspirés des méthodes citées précédemment par les contrôleurs thermostatiques, nous présentons dans ce mémoire deux nouvelles méthodes complètement décentralisées qui vont rendre le processus de contrôle de chaque contrôleur MPC aléatoire pour chaque système thermostatique. Ainsi, ces méthodes vont permettre de diminuer la synchronisation des systèmes et éviter les pics de consommation de puissance et les oscillations de puissance dans le système.

### 2.1.3 Modélisation des équations aux dérivées partielles pour les systèmes thermostatiques

Pour caractériser les méthodes de désynchronisation des systèmes thermostatiques contrôlés par MPC, nous développons, en plus des simulations de Monte-Carlo, un modèle d'équation aux dérivées partielles pour décrire le comportement dynamique de la population étudiée. Le premier modèle PDE agrégé d'une population de systèmes thermostatiques est donné dans l'article de Malhamé et Chong ([57]). Sous la condition que la population étudiée est homogène, avec tous les systèmes thermostatiques gouvernés par une équation stochastique différentielle de Itô, utilisant un contrôle thermostatique, alors le comportement dynamique de la population peut être exprimé par deux équations couplées de Fokker-Planck. Ce système d'équations décrit la distribution de température des systèmes thermostatiques dans l'état ON et OFF. Dans des articles plus récents, ce modèle agrégé PDE a intégré d'autres éléments, comme des méthodes de contrôle ([58, 63–65, 69]). Les modèles agrégés EDP peuvent aussi être appliqués aux systèmes au modèle déterministe. En utilisant la loi de conservation de masse, une équation de transport semi-linéaire a été développée par Callaway ([58]) pour

une population homogène de systèmes thermostatiques. Plus tard, il a été montré par Moura ([61]) qu'il était possible de généraliser ceci à une population de systèmes thermostatiques hétérogènes en ajoutant un terme diffusif. L'ajout de ce terme diffusif revient au même type de modèle PDE qui avait été développé pour un système stochastique. De plus, une population hétérogène contenant une grande diversité peut être divisée en un nombre fini de sous-systèmes ; avec chaque sous-système représentant une population où l'hétérogénéité de celle-ci est limitée ([70]). Il est important de noter que comme le cas d'une population de systèmes thermostatiques contrôlés par un thermostat où le modèle EDP représente la distribution de température des états ON et OFF, les équations sont couplées dû aux conditions aux limites, le modèle EDP développé pour les systèmes thermostatiques contrôlés par MPC est couplé par les actions du contrôleur à l'intérieur du domaine admissible, ce qui est comparable au modèle présenté par Le Floch ([71]). D'après nos connaissances, c'est la première fois qu'un modèle PDE agrégé est utilisé pour représenter une large population de systèmes thermostatiques contrôlés par MPC. Pour résumer, le travail présenté ici s'attache à atténuer les oscillations de puissance et les pics de puissance qui apparaissent de manière plus fréquent dans une population homogène de systèmes et d'utiliser pour la première fois un modèle PDE afin de représenter, dans un premier temps, le comportement dynamique des ces populations.

## 2.2 Objectifs et méthodologie

Grâce au travail effectué dans cette revue de littérature, plusieurs objectifs de recherche s'imposent. Le premier objectif consiste à proposer un modèle thermique dynamique d'un serveur informatique, le second est la création de deux méthodes décentralisées de désynchronisation de systèmes thermostatiques et le troisième objectif est de représenter la population de contrôleurs avec un système PDE. Les objectifs et les méthodes associées sont détaillés ci-après.

### 2.2.1 Objectifs

#### Objectif pour le modèle thermique dynamique

L'objectif de cette partie est énoncé de la façon suivante :

**Objectif 1 : Développer un modèle thermique dynamique d'un serveur informatique afin de pouvoir développer et tester les méthodes de désynchronisation du contrôleur MPC.**

La revue de littérature permet de se rendre compte qu'il n'existe, à notre connaissance, aucun modèle thermique dynamique adapté au contrôle des ventilateurs des serveurs informatiques.



Certains modèles existent, mais ne font pas apparaître la vitesse de rotation des ventilateurs comme une variable manipulable. C'est à partir de ces modèles que nous construisons le nôtre.

### **Objectif pour les méthodes décentralisées de désynchronisation**

L'un des principaux enjeux du contrôle d'une grande population de systèmes thermostatique est les oscillations de puissance dans le réseau électrique. De nombreuses méthodes ont été développées pour les systèmes contrôlés par thermostat, mais très peu pour les systèmes contrôlés par MPC. De plus, l'objectif demande des méthodes décentralisées afin qu'il n'y ait pas de contrôleur de niveau supérieur devant assurer la désynchronisation des systèmes. Un contrôle de niveau supérieur nécessite des communications fréquentes entre les contrôleurs et donc une charge de calcul plus importante. Ce qui n'est pas désirable dans le cas étudié. L'objectif est formulé de la façon suivante :

**Objectif 2 : Développer deux méthodes décentralisées permettant de désynchroniser une population de systèmes thermostatiques contrôlés par commande prédictive.**

La revue de littérature a permis de se rendre compte qu'il existe peu de méthodes permettant d'atteindre cet objectif, car les contrôleurs MPC ne sont souvent pas utilisés pour de grandes populations de systèmes.

### **Objectif pour modéliser à l'aide d'un système d'équations aux dérivées partielles le comportement dynamique d'une population de systèmes contrôlés par commande prédictive**

La revue de littérature a permis de mettre de l'avant les différentes méthodes PDE qui sont utilisées pour contrôler des systèmes thermostatiques. Notre méthode a pour avantage de pouvoir s'appuyer sur une modélisation facile d'une population de systèmes à l'aide de deux équations aux dérivées partielles et de pouvoir contrôler leur consommation de puissance en ajustant la température de référence de celles-ci. La dynamique d'un système contrôlé par MPC étant sensiblement la même que celle d'un système contrôlé par un thermostat il est donc intéressant de se pencher sur la modélisation PDE d'une population de MPC. La méthode PDE étant une méthode très puissante, pouvoir l'utiliser avec des contrôleurs MPC serait un réel avantage. Le dernier objectif de ce mémoire est le suivant :

**Objectif 3 : Développer un modèle d'équations aux dérivées partielles adapté à la modélisation d'une population de systèmes thermostatiques contrôlés par une commandes prédictives.**

### 2.2.2 Méthodologie et contributions

#### Méthodologie et contribution du modèle thermique dynamique d'un serveur informatique

Afin de réaliser le modèle thermique dynamique attendu, celui-ci est basé sur le modèle thermique donné par Lucchese ([21]). Dans ce modèle existe un seul terme convectif. Ce terme convectif recouvre le terme de convection naturelle et le terme de convection forcée, ceci est explicité dans le modèle de ce mémoire, car il est nécessaire de modéliser l'impact de la vitesse de rotation des ventilateurs sur les composants électroniques. Ce modèle général développé doit être adapté au contrôle MPC. Pour ce faire, le modèle est linéarisé, découplé et discrétisé afin de faciliter la résolution numérique par les méthodes d'optimisations. La contribution de ce chapitre est le modèle thermique d'un serveur informatique adapté au contrôle des ventilateurs par des MPC.

#### Méthodologie et contribution des méthodes décentralisées de désynchronisation

La première méthode développée est un délai aléatoire sur la commande de température. En effet en partant du principe qu'un changement de commande lorsqu'il est envoyé simultanément à tous les systèmes thermostatiques engendrent un pic de consommation de puissance, il est donc intéressant d'étaler dans le temps ce changement de consigne. Pour ce faire, chaque contrôleur applique la consigne donnée après un délai aléatoire choisi dans une certaine distribution de probabilité. La distribution de probabilité et le changement de consigne sont choisis en amont par un contrôleur de niveau supérieur, mais il n'y a aucune communication entre les contrôleurs au cours de la simulation. Cette méthode permet d'étaler dans le temps le changement de consigne et donc vient limiter les oscillations engendrées par le changement de consigne.

La seconde méthode consiste à ajouter une pénalisation aléatoire sur l'effort de commande dans la fonction objectif du contrôleur MPC. Cette pénalisation aléatoire est choisie dans une certaine distribution et est actualisée à chaque itération du contrôleur. Cette méthode a pour objectif d'ajouter artificiellement une hétérogénéité dans la population de systèmes contrôlés. La commande est ainsi plus ou moins pénalisée ce qui rend le contrôle du système par le contrôleur unique.

La contribution de cette partie est le développement de ces deux méthodes décentralisées permettant de désynchroniser une population homogène de systèmes thermostatiques. Ces méthodes étant de nature différente dans leur forme il est possible de les associer ensemble

afin de maximiser les bénéfices de chacune.

### **Méthodologie et contribution afin de modéliser le comportement dynamique d'une population de systèmes contrôlés par commande prédictive à l'aide d'un système d'équations aux dérivées partielles**

Grâce à la revue de littérature, on a vu qu'il était possible de représenter le comportement dynamique d'une population de TCLs contrôlé par MPC. Cette représentation nécessite quelques ajustements vis-a-vis des modèles déjà développés. Ce modèle ouvre la porte à un contrôleur PDE de niveau supérieur contrôlant des MPC. Basé sur ce constat, et pour adapter le modèle PDE au contrôle MPC, on introduit une fonction de commutation  $\delta(x, t)$  qui permet de représenter les changements d'état à l'intérieur d'une population à chaque itération. En agissant ainsi le modèle PDE permet de modéliser de façon très fidèle les simulations de Monte-Carlo faites avec le MPC. Les simulations de Monte-Carlo correspondent au comportement dynamique des systèmes thermostatiques. Le premier modèle PDE utilise une équation de transport afin de modéliser une population homogène. Ce modèle est étendu aux populations hétérogènes par une paire d'équations couplées de Fokker-Planck. Enfin, un exemple de contrôleur de niveau supérieur permet de valider la démarche entamée pour ce mémoire en contrôlant la puissance totale de la population grâce à des variations de la température de référence.

Dans le reste de ce mémoire, le chapitre 3 décrit le modèle dynamique thermique du système considéré. Le chapitre 4 présente deux méthodes décentralisées de désynchronisation pour une population de systèmes thermostatiques contrôlés par MPC. Dans le chapitre 5, un modèle agrégé PDE est développé pour une large population de systèmes thermostatiques avec ces éléments contrôlés par MPC. Ensuite, ce modèle agrégé PDE est implémenté, et une comparaison avec les résultats obtenus par la méthode de Monte-Carlo est effectuée. Enfin, les conclusions de ce mémoire et les améliorations futures sont présentées dans le chapitre 6.

## CHAPITRE 3 MODÈLE THERMIQUE DYNAMIQUE

Comme vu précédemment dans la revue de littérature, un bon modèle d'un système est indispensable au bon contrôle de ce système. En effet, toutes les décisions et les instructions se font grâce à ce modèle. Celui-ci doit être suffisamment simple pour permettre de facilement calculer la variable qui nous intéresse, mais également suffisamment précise pour modéliser correctement la dynamique de celui-ci. En effet, si le modèle n'est pas assez précis alors les calculs du contrôleur ne permettront jamais d'atteindre l'état désiré. Ici, au vu des objectifs du projet, nous allons nous baser notre contrôle sur un modèle thermique. En effet, le but est de contrôler la température d'un système afin de réduire sa consommation d'énergie et de puissance. Pour ce faire, il faut analyser tous les éléments pouvant avoir un impact sur la température que nous voulons contrôler. Dans le cas d'un serveur d'un centre de données, il a les composants électriques qui contribuent au chauffage du serveur. La température de la pièce et les ventilateurs des serveurs contribuent au refroidissement de celui-ci.

Bien que le système développé ici soit adapté aux systèmes refroidissant, il est important de noter qu'il est généralisable pour tous les systèmes thermostatiques, les chauffages, les climatisations, les chauffe-eau. L'exemple d'un modèle représentant les différents échanges thermiques se produisant dans un serveur est donné ci-après.

### 3.1 Modèle thermique global

Ici, nous nous intéressons aux échanges thermiques à l'intérieur d'un serveur informatique. Un serveur informatique est un dispositif qui abrite des processeurs électroniques et des cartes mémoire afin de réaliser des calculs. Une illustration des échanges thermiques d'un serveur est présentée Fig. 3.1. Ces composants libèrent de l'énergie sous forme de chaleur par effet Joule et il est donc important d'évacuer cette chaleur. Pour ce faire, des dissipateurs de chaleur sont en général montés sur les processeurs afin de maximiser les échanges thermiques avec l'air et ainsi refroidir le plus possible les processeurs. Cependant, cela n'est souvent pas suffisant, les serveurs sont stockés dans des salles climatisées et l'air frais est soufflé sur les composants par l'intermédiaire de ventilateurs. Le modèle thermique dynamique d'un serveur est donné

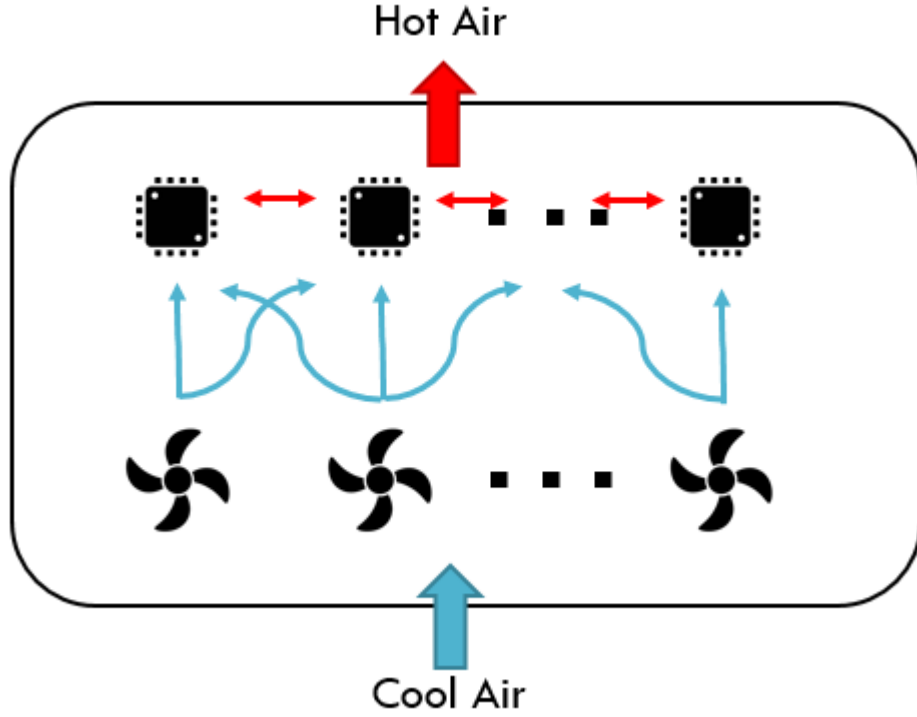


Figure 3.1 Échanges thermiques dans un serveur informatique

par Lucchese ([21]) :

$$\begin{aligned}
 \frac{dT^j}{dt} = & \underbrace{\frac{1}{R_j^a C_j} (T^a - T^j) + \sum_{k=1}^M \frac{1}{R_{kj}^f C_{kj}^f} (T^a - T^j) u_k}_{convection} + \underbrace{\sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{1}{R_{ij}^r C_{ij}^r} (T^i - T^j)}_{conduction} \\
 & + \underbrace{\frac{1}{C_j} \Phi^j + \frac{1}{C_j} \sigma_j w^j}_{chauffage},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec

- $M$  le nombre de ventilateurs dans le serveur,
- $N$  le nombre de composants électroniques,
- $T^j$ ,  $j \in \{1, \dots, M\}$  la température du composant  $j$ ,
- $T^i$  la température du composant  $i$ ,
- $T^a$  la température ambiante du centre de données,
- $R_{ij}^r$  est la résistance thermique entre le composant  $j$  et  $i$ ,
- $R_{kj}^f$  est la résistance thermique entre le composant  $j$  et le ventilateur  $k$ ,

- $R_j^a$  est la résistance thermique entre le composant  $j$  et le milieu ambiant,
- $C_j$  est la capacité thermique du composant  $j$ ,
- $C_{kj}^f$  est la capacité thermique entre le composant  $j$  et le ventilateur  $k$ ,
- $C_{ij}$  est la capacité thermique entre le composant  $j$  et  $i$ ,
- $\Phi^j$  est la puissance dissipée par effet Joule,
- $w^j$  est le bruit blanc,
- $(\sigma_j)^2$  est la variance du bruit blanc,
- $u_k$  est la commande du système, l'état du ventilateur  $k$  (allumé  $u_k = 1$ , éteint  $u_k = 0$ ).

L'équation (3.1) est divisée en trois parties, chacune représentant un phénomène physique intervenant dans les variations de température des composants électroniques. Le premier terme est le terme convectif, il est composé du terme relié à la convection naturelle, entre le composant et le milieu ambiant, et le terme de convection forcée qui est la somme de toutes les convections forcée entre le composant et les ventilateurs du serveur. Le second terme est le terme conductif. Il modélise les échanges thermiques entre un composant et ses voisins par conduction. Enfin, le troisième terme représente la diffusion par effet Joule des composants électroniques. On y ajoute un terme de bruit blanc afin de modéliser les perturbations pouvant s'exercer sur le système.

Le modèle présenté est non linéaire. En effet, le terme de convection forcée fait apparaître le produit entre l'état du système (la température) et la variable du système (la commande des ventilateurs). Afin d'utiliser un contrôleur MPC, le modèle thermique est linéarisé. Nous considérons la température ambiante constante dans le système. De plus, la température du système ne varie que très légèrement, de l'ordre de  $1^\circ C$ . On peut considérer que la différence des deux termes est constante comme expliqué dans l'article de Malhamé et Chong ([57]). On approxime l'état du système autour de son point de fonctionnement par la constante  $T^o$ . Ainsi le système est linéarisé. Le terme de bruit blanc est considéré comme nul par la suite, car le contrôleur absorbe naturellement les perturbations dans le système. Le bruit blanc est aussi une source indépendante d'aléas d'un serveur à l'autre. Le système peut être écrit comme modèle linéaire et continu sous la forme décrite par Abobakr ([67]) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ed, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $x = (T^1 \ \dots \ T^N)^T$  est le vecteur d'état,  $u = (u_1 \ \dots \ u_M)^T$  est la variable du système et  $d = (T^a \ \Phi^1 \ \dots \ \Phi^N)^T$  est le vecteur des perturbations.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{1}{C_1 R_{2,1}^r} & \cdots & \frac{1}{C_1 R_{N,1}^r} \\ \frac{1}{C_2 R_{1,2}^r} & A_2 & \cdots & \frac{1}{C_2 R_{N,2}^r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{C_N R_{1,N}^r} & \frac{1}{C_N R_{2,N}^r} & \cdots & A_N \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{T^a - T^o}{R_{1,1}^f C_1} & \cdots & -\frac{T^a - T^o}{R_{M,1}^f C_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{T^a - T^o}{R_{1,N}^f C_1} & \cdots & -\frac{T^a - T^o}{R_{M,N}^f C_M} \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix};$$

avec  $A_j = -\frac{1}{R_j^n C_j} - \frac{1}{C_j} \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{1}{R_{i,j}^r}$ ,  $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1^a C_1} & \cdots & \frac{1}{R_N^a C_N} \end{pmatrix}^T$ ,  $E_2 = \text{diag} \left( \frac{1}{C_1} \quad \cdots \quad \frac{1}{C_N} \right)$  et  $C = I$  la matrice identité.

### 3.2 Modèle thermique décentralisé

Le modèle précédent est applicable afin de réaliser un contrôleur MPC. Cependant afin de généraliser le modèle PDE aux contrôleurs MPC il est important de découpler le modèle thermique. Pour ce faire, le système (3.2) est divisé en sous-systèmes. (3.2) est asymptotiquement stable en boucle ouverte. Un système thermique est toujours stable, car la température du système ne peut pas diverger. D'après Alessio ([72]) le modèle découplé peut être utilisé pour la conception du MPC et l'ensemble des sous-systèmes sont également asymptotiquement stables en boucle ouverte. Notons  $P$  le nombre de sous-systèmes et  $x^j \in R^{n_j}$ ,  $u^j \in R^{m_j}$ ,  $d^j \in R^{l_j}$  est le vecteur d'état, le vecteur variable, et le vecteur de perturbations du  $j$ -ème sous-système avec  $n_1 + \cdots + n_P = N$ . Pour tous les sous-systèmes, le vecteur peut être représenté par :

$$x^j = W_j^T x = \begin{pmatrix} x_1^j & \cdots & x_{n_j}^j \end{pmatrix}^T \in R^{n_j}; \quad (3.3)$$

$$u^j = Z_j^T u = \begin{pmatrix} u_1^j & \cdots & u_{m_j}^j \end{pmatrix}^T \in R^{m_j}; \quad (3.4)$$

$$d^j = H_j^T x = \begin{pmatrix} d_1 & d_1^j & \cdots & d_{l_j-1}^j \end{pmatrix}^T \in R^{l_j}; \quad (3.5)$$

où  $W_j \in R^{N \times n_j}$  collecte  $n_j$  colonnes de la matrice identité de  $n_1 + \cdots + n_{j-1} + 1$  à  $n_1 + \cdots + n_j$ .  $Z_j \in R^{M \times m_j}$  collecte  $m_j$  colonnes de la matrice identité de  $m_1 + \cdots + m_{j-1} + 1$  à  $m_1 + \cdots + m_j$ .

$H_j \in R^{N \times l_j}$  collecte  $l_j$  colonnes de la matrice identité de  $l_1 + \dots + l_{j-1} + 1$  à  $l_1 + \dots + l_j$ . Et  $W_j^T W_j = I_{n_j}$ ;  $Z_j^T Z_j = I_{m_j}$ ;  $H_j^T H_j = I_{l_j}$ . Pour le  $j$ -ème sous-système le modèle décentralisé est le suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}^j &= A^j x^j + B^j u^j + E^j d^j; \\ y^j &= C^j x^j;\end{aligned}\tag{3.6}$$

où  $A^j = W_j^T A W_j \in R^{n_j \times n_j}$ ;  $B^j = W_j^T B Z_j \in R^{n_j \times m_j}$ ,  $E^j = W_j^T E Z_j \in R^{n_j \times l_j}$  et  $C^j = W_j^T C W_j \in R^{n_j \times n_j}$  sont les matrices extraites des matrices originales  $A$ ,  $B$ ,  $E$ , et  $C$ . Afin d'illustrer le propos un exemple de petit système peut être un processeur isolé refroidit par ventilateur unique.

### 3.3 Modèle thermique pour commande prédictive

Pour utiliser un contrôleur MPC par la suite, il est plus facile de développer un modèle thermique discret. Ce modèle discret est dérivé du modèle continu donné dans (3.6). Le modèle discret est obtenu en utilisant la méthode standard d'ordre zéro, en anglais "zero-order hold (ZOH)", avec une période d'échantillonnage de  $T_s$ , ainsi le modèle discret est le suivant :

$$\begin{aligned}x_j(k+1) &= A_d^j x_j(k) + B_d^j u_j(k) + E_d^j d_j(k); \\ y_j(k) &= C_d^j x_j(k);\end{aligned}\tag{3.7}$$

où  $x_j(k) \in R^{n_j}$  est le vecteur d'état,  $u_j(k) \in R^{m_j}$  est le vecteur de variable,  $d_j(k) \in R^{l_j}$  est le vecteur de perturbation et  $y_j(k) \in R^{n_j}$  est le vecteur de sortie. Les matrices  $A_d^j$ ,  $B_d^j$ ,  $E_d^j$  et  $C_d^j$  s'obtiennent grâce à  $A_d^j = e^{A^j T_s}$ ;  $B_d^j = \int_0^{T_s} e^{A^j s} B^j ds$ ;  $E_d^j = \int_0^{T_s} e^{A^j s} E^j ds$ ; et  $C_d^j = C^j$ . Le modèle ainsi développé permet de contrôler l'état des ventilateurs des serveurs afin de maintenir une température optimale.



## CHAPITRE 4 DÉSYNCHRONISATION DE SYSTÈMES PAR CONTRÔLE AVEC COMMANDE PRÉDICTIVE

Dans ce chapitre est abordé l'enjeu de contrôler une large population de TCLs. L'objectif du projet est de pouvoir contrôler une large population sans créer d'oscillations de puissance et de réduire les pics de puissance au maximum. La synchronisation des systèmes est en effet un des problèmes majeurs lors du contrôle d'une large population homogène. La synchronisation des TCLs induit des oscillations de puissance et des pics de consommation de puissance dans le réseau électrique. Dans ce chapitre, deux méthodes décentralisées sont proposées pour répondre à ce problème. Ces méthodes permettent de réduire les problèmes évoqués plus haut au niveau du contrôleur individuel, sans nécessité d'une vision globale de l'ensemble de la population.

### 4.1 Modèle de Commande prédictive pour Systèmes indépendants

Basé sur le modèle thermique discret développé dans (3.7), un programme décentralisé est développé dans le but de minimiser la puissance consommée par les TCLs tout en respectant les contraintes de température. L'horizon de prédiction est nommé  $P$ , pour le  $j$ -ème composant le problème d'optimisation est le suivant ([67]) :

$$\min_{u^j(0), \dots, u^j(P-1)} \sum_{k=1}^{P-1} l(x^j(k), u^j(k)), \quad (4.1a)$$

$$\text{sujet à : } x^j(k+1) = A_d^j x^j(k) + B_d^j u^j(k) + E_d^j d^j(k), \quad (4.1b)$$

$$x^j(t) \rightarrow x^j(0) \quad (4.1c)$$

$$u^j(k) \in \{0, 1\}, \quad (4.1d)$$

$$x_{\text{ref}}(k) - \Delta T/2 \leq x^j(k) \leq x_{\text{ref}}(k) + \Delta T/2, \quad (4.1e)$$

où  $x(k)$  ;  $u(k)$  et  $d(k)$  représentent la valeur d'état, la commande et les prédictions de chaleur à la  $k$ -ème itération. Avec comme condition initiale à chaque itération  $x(0) = x(t)$ ,  $t > 0$ ,  $\Delta T$  est la plage de température.  $P$  est le nombre de période de prédiction du contrôleur MPC. La fonction objectif :

$$l(x(k), u(k)) = (x_{\text{ref}}(k) - x(k))Q(x_{\text{ref}}(k) - x(k))' + u(k)Ru(k)' \quad (4.2)$$

est la somme de deux termes quadratiques : l'erreur de suivi entre l'état de référence et l'état du système, et la consommation de puissance qui dépend directement de la commande du contrôleur. Avec  $Q$  et  $R$  des matrices définies positives. L'état du système est contenu sur une plage de température et les ventilateurs sont dans l'état ON ou OFF. Le contrôleur change d'un état à un autre en fonction de la fonction objectif et basé sur la température en temps réel des composants. À chaque itération du contrôleur, les  $P$  prochaines solutions sont calculées et seulement la première solution est implémentée. À l'itération suivante, le processus se répète, on est dans un cas dit d'horizon fuyant. Le vecteur de perturbation est choisi constant ici pour se focaliser sur les effets produits par les méthodes de désynchronisation. Afin de créer un pic de puissance, l'état de référence est choisi constant à une température  $T = 78^\circ C$  avec une chute de  $1^\circ C$  au temps  $t = 10$  en unités normalisé. Le temps est ici normalisé, chaque itération du contrôleur MPC correspond à 0,1 unité de temps. Sur Fig. 4.1 est représenté l'état de référence du système au cours de la simulation. Sur Fig. 4.2 est représenté la proportion de systèmes dans l'état ON au cours du temps. Cette simulation est réalisée avec 1000 contrôleurs. La distribution initiale de température est uniformément distribuée dans  $[78,0;78,25]$ . Le mécanisme de commande est fait par commande prédictive et le changement de consigne correspond à un changement dans la température de référence des thermostats. Des oscillations très fortes apparaissent dès le début de la simulation et sont encore plus importantes après le changement d'état de référence à  $t = 10$ . Un pic de consommation est aussi créé à  $t = 10$  et c'est par rapport à ce test qu'est comparé les deux méthodes définies ci-après. La réponse en température du système est illustre Fig. 4.4.

## 4.2 Mécanismes de contrôle et de désynchronisation

Dans cette section sont présentées les deux méthodes de désynchronisation. Comme observé Fig. 4.2, le contrôle d'une large population de TCL implique de fortes oscillations et un important pic de consommation. Il est important de produire des méthodes de désynchronisation décentralisées afin de réduire ces oscillations de puissance.

### 4.2.1 Délai dans l'état de référence

Le délai dans l'état de référence permet de retarder l'application d'un changement de consigne sur le système. Au lieu de réaliser le changement de consigne simultanément pour l'ensemble des contrôleurs, le changement de consigne va être réparti sur une certaine plage de temps. La fonction à minimiser du MPC est de la forme suivante :

$$l(x^j(k), u^j(k)) = \|e^j(k)\|_Q^2 + \|u^j(k)\|_R^2 \quad (4.3)$$

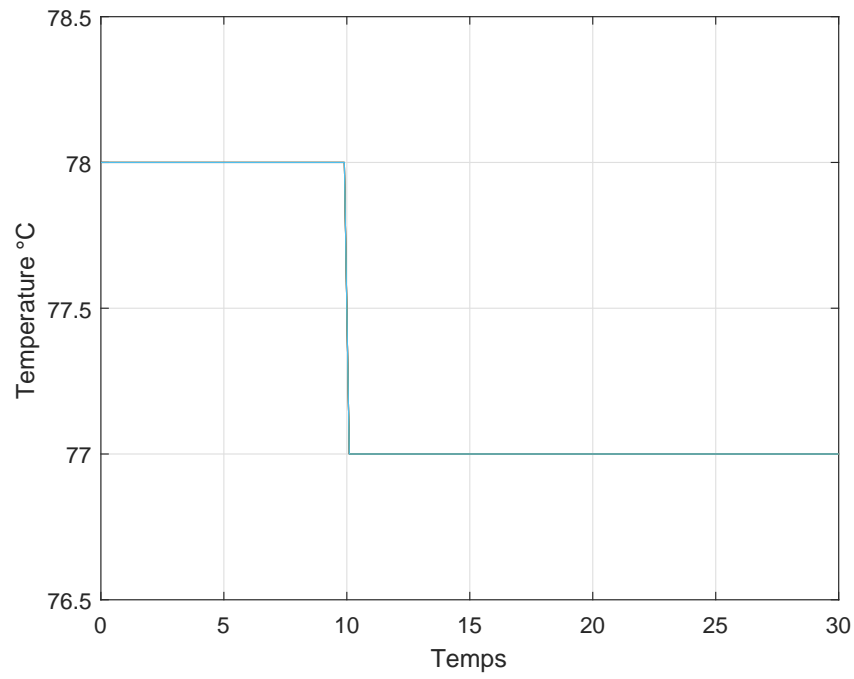


Figure 4.1 État de référence du système  $x_{ref}$

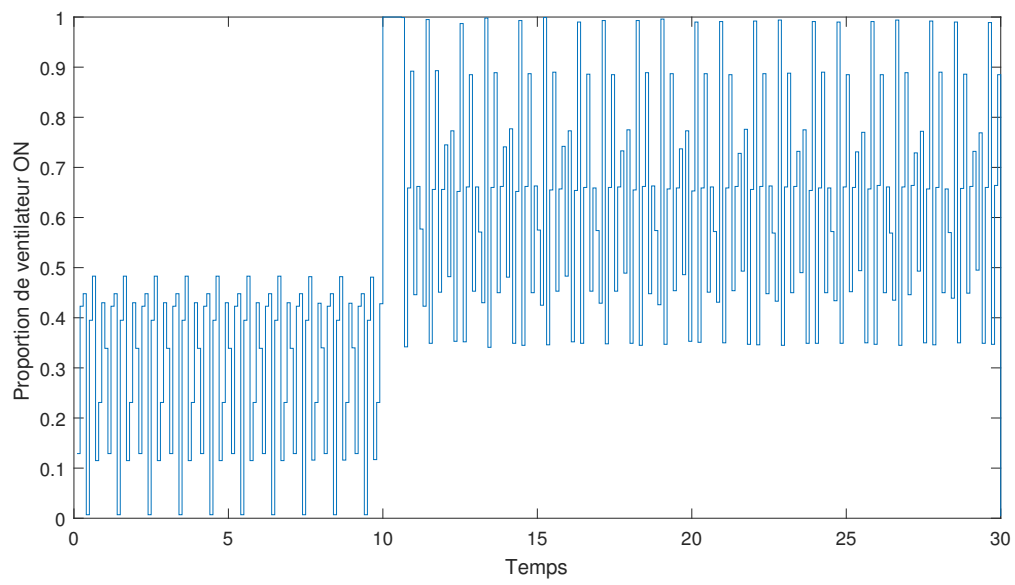


Figure 4.2 Proportion de ventilateurs dans l'état ON dans le cas témoin

où  $e^j = x_{ref}^j - x^j$  est l'erreur de suivi et  $u^j$  est la commande du système.  $Q$  et  $R$  sont des matrices définies positives. Dans le cas étudié, introduisons l'état de référence du système, cet état de référence est de la forme suivante :

$$x_{ref}(t) = x_0 + \Delta x_{ref} H(t - t_0) \quad (4.4)$$

où  $x_0$  est la valeur initiale de référence,  $\Delta x_{ref}$  est une constante représentant le changement dans l'état de référence,  $H(\cdot)$  est la fonction de Heaviside, aussi appelé la fonction échelon  $t_0$  est le temps auquel l'échelon se produit. Ainsi pour le sous-système  $j$  on a la fonction suivante :

$$x_{ref}^j(t) = x_0 + \Delta x_{ref} H(t - t_0 - \tau_j), \quad (4.5)$$

avec  $\tau_j$  une valeur positive choisie dans une distribution aléatoire. Ici, nous considérons le cas où la distribution aléatoire est uniforme. Le délai  $\tau_j$  permet de retarder le changement de consigne. Une illustration de l'état de référence avec délai est montrée Fig. 4.3. Il est important de noter que chaque contrôleur génère ce délai de façon aléatoire et indépendante des autres contrôleurs. Nous avons donc ici une façon décentralisée de désynchroniser les contrôleurs. Le délai maximal est de 5 unités de temps normalisées. Deux simulations sont réalisées, l'une avec un délai maximal de 2,5 unités de temps et la seconde avec un délai maximal de 5 unités de temps. La réponse en température de l'instauration d'un tel délai est illustrée 4.3. Le changement de température est uniformément réparti sur la plage de temps  $t = 10$  à  $t = 15$ .

#### 4.2.2 Pénalisation supplémentaire sur l'effort de contrôle

Une autre méthode pour désynchroniser l'ensemble des contrôleurs consiste à ajouter une pénalisation supplémentaire sur l'effort de commande  $R$ . Pénaliser de manière aléatoire la commande dans l'état de référence a pour objectif de désynchroniser les TCLs. La fonction objectif est (4.3). Notons  $\bar{R}$ , une matrice définie positive, la pénalisation de base du contrôleur MPC. On pénalise aléatoirement la matrice  $\bar{R}$  au cours du temps. Cette pénalisation ajoutée sur  $\bar{R}$  est choisie indépendamment pour chaque contrôleur et varie dans le temps. Pour le sous-système  $j$ , nous avons la pénalité qui est de la forme suivante :

$$R^j(t) = \bar{R} + \Delta R^j(t)I, \quad (4.6)$$

avec  $\Delta R^j$  une variable aléatoire positive choisie dans une certaine distribution aléatoire. Ici, nous étudions le cas d'une distribution aléatoire uniforme. De la même façon que pour le délai dans l'état de référence, la pénalisation supplémentaire est choisie de manière indé-

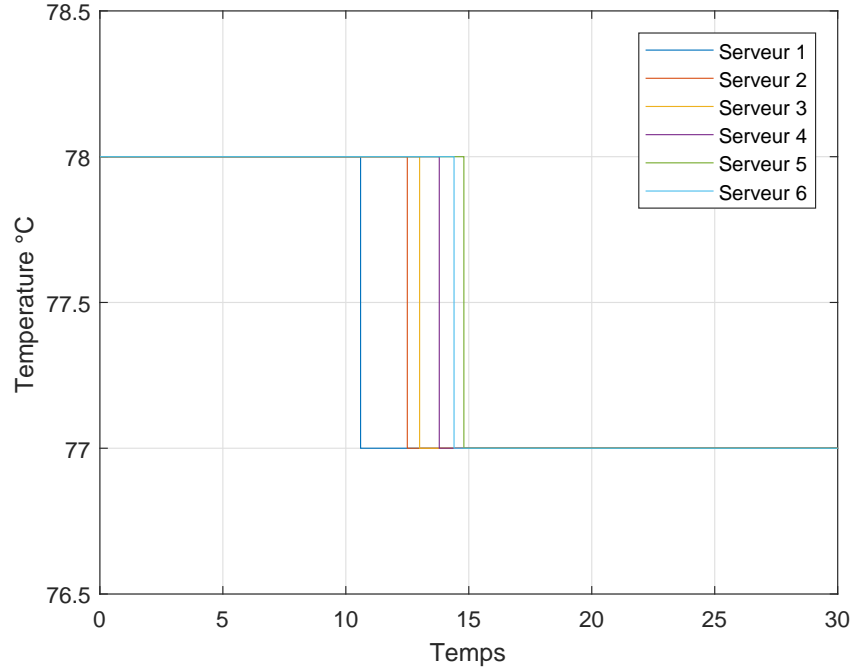


Figure 4.3  $x_{ref}$  pour un échantillon de 6 contrôleurs avec délai

pendante des autres contrôleurs et une nouvelle variable aléatoire est tirée à chaque période d'échantillonnage du contrôleur. Ainsi on introduit artificiellement une hétérogénéité dans une population qui est à la base homogène. Plus la pénalisation est importante sur la matrice  $\bar{R}$ , plus le système va avoir tendance à avoir une erreur de suivi plus importante et donc plus le système va s'approcher de la borne supérieure des contraintes de température. Nous avons donc là aussi une méthode de désynchronisation qui est totalement décentralisée sur l'ensemble de la population.

Les deux méthodes développées ont toutes les deux pour objectif de réduire le pic de puissance et les oscillations observées sur Fig. 4.2. Ces deux méthodes sont implémentées de façon différente et indépendante. Leur effet sur la consommation de puissance est différent et il est important de noter que les deux méthodes présentées ci-dessus peuvent être utilisées simultanément afin de bénéficier des avantages de chacune. Ces deux méthodes sont décentralisées et ne nécessitent que le changement de consigne provenant d'un contrôleur de niveau supérieur. Au total, 6 scénarios sont étudiés :

- le scénario témoin,
- le scénario avec délai dans l'état de référence (délai maximum de 2,5 unités de temps),
- le scénario avec délai dans l'état de référence (délai maximum de 5 unités de temps),
- le scénario avec pénalisation supplémentaire sur la commande,

- le scénario avec pénalisation supplémentaire sur la commande et délai dans l'état de référence (délai maximum de 2,5 unités de temps),
- le scénario avec pénalisation supplémentaire sur la commande et délai dans l'état de référence (délai maximum de 5 unités de temps).

### 4.3 Validation des mécanismes de désynchronisation par simulations de Monte-Carlo

Dans cette section sont présentés les résultats préliminaires obtenus par simulation de Monte-Carlo du contrôleur MPC. Les cas étudiés le sont sur un modèle simplifié où chaque contrôleur est indépendant de ses voisins. Cette configuration a été choisie pour simplifier les calculs et aussi, car elle permet d'isoler le comportement de chaque individu. Enfin, cette configuration est mieux adaptée au modèle PDE développé dans la section suivante. Les simulations ont été réalisées sur le logiciel MATLAB en utilisant l'extension libre de droit YALMIP ([73]). Cette extension permet de résoudre les problèmes d'optimisation en utilisant les méthodes heuristiques avec MATLAB. Les simulations suivantes sont réalisées sur une population de 1000 contrôleurs indépendants. Nous avons donc  $N = M = 1000$ ,  $x^j = T^j$ ,  $j, \dots, 1000$ , et  $u^j$  et  $d^j$  des variables scalaires. Les systèmes contrôlés sont identiques, ce qui signifie que la population observée est homogène. Une population homogène implique une synchronisation plus importante comme nous avons déjà pu le constater. Ainsi il est important de noter que le cas de figure d'une population homogène étant assez rare, nous avons choisi d'étudier le pire cas. Il est donc possible d'obtenir de meilleurs résultats en pratique que ceux que nous avons obtenus expérimentalement. Les simulations ont été réalisées sur une période de 300 périodes d'échantillonnage du MPC. Le temps étant normalisé, chaque période d'échantillonnage correspond à 0,1 unité de temps. Les paramètres du système sont donnés par la table 4.1. Dans les simulations, la dissipation par effet Joule est considérée comme constante. Nous considérons pour commencer une population homogène de systèmes, contrôlée par un contrôleur MPC afin d'illustrer le phénomène de synchronisation. On suppose que la température initiale du système est  $x_0 = 78^\circ C$ . Cette valeur est choisie au regard des températures maximales autorisées pour plusieurs processeurs de la marque Intel ([74]). Puis, une diminution de température  $\Delta x_{ref} = -1^\circ C$  est appliquée au temps  $t = 10$ . La puissance totale consommée pour l'ensemble des systèmes est notée  $P_{MPC}$  et est calculée de la façon suivante :

$$P_{MPC}(t) = \sum_{j=1}^M u^j(t). \quad (4.7)$$

Tableau 4.1 Paramètres du système

Paramètres	Description [Unité]	Valeur
$R^a$	Résistance thermique avec le milieu ambiant [ $^{\circ}\text{C}/\text{kW}$ ]	5
$R^f$	Résistance thermique avec le ventilateur [ $^{\circ}\text{C}/\text{kW}$ ]	5
$C$	Capacité thermique [ $\text{kWh}/^{\circ}\text{C}$ ]	10
$C^f$	Capacité thermique avec le ventilateur [ $\text{kWh}/^{\circ}\text{C}$ ]	200
$T^a$	Température ambiante [ $^{\circ}\text{C}$ ]	20
$T^o$	Température d'opération du système [ $^{\circ}\text{C}$ ]	77.5
$\Phi$	Puissance dissipée [ $\text{kW}$ ]	12
$Q$	Poids de la fonction objectif sur l'erreur de suivi $e$	30
$R$	Poids de la fonction objectif sur la commande $u$	10
$\Delta R$	Pénalisation supplémentaire sur la commande	$\in [0; 0.7]$
$\Delta T$	Plage de température accessible [ $^{\circ}\text{C}$ ]	0.6
$P$	Nombre de périodes de prédiction du MPC	5

Sur les figures 4.10 et 4.11 est représenté le profil de puissance totale consommée dans les 6 cas étudiés pour 1000 unités. Parmi eux, le premier est le cas témoin, par rapport auquel les performances des méthodes sont évaluées, un échantillon de l'état du système est présenté Fig. 4.4. On remarque que le changement d'état de référence induit une oscillation de consommation qui conduit l'ensemble des systèmes à être dans l'état ON, ce qui correspond à la puissance maximale consommable. Le contrôle correspondant ne peut être calculé que de manière centralisée. Sur la figure 4.10, les deux autres cas illustrés sont les cas avec délai dans l'état de référence avec un délai maximum de 2,5 et 5 unités de temps. La réponse en température de 100 systèmes est visible sur les figures 4.5 et 4.6 respectivement. Sur 4.11, le premier cas est le cas avec pénalisation supplémentaire de la commande dans la fonction objectif. L'effet de la pénalisation aléatoire sur le système est visible sur la figure 4.7. La pénalisation supplémentaire  $\Delta R^j(k)$  est choisie dans une distribution de température uniforme sure  $[0, 0.7]$  à chaque itération du contrôleur. Les deux derniers cas sont réalisés avec pénalisation supplémentaire dans la fonction objectif et délai de 2,5 et 5 unités de temps dans l'état de référence. Ces deux derniers cas sont donc la combinaison des deux méthodes de désynchronisation présentées ici. L'effet de ces deux méthodes combiné sur la température est montré sur les figures 4.8 et 4.9 respectivement. Les conditions initiales du système sont identiques pour chaque simulation.

La table 4.2, permet de résumer les valeurs marquantes de ces simulations. Les simulations ont été divisées en 3 phases. La phase 1 correspond à  $t \in [0; 10[$ , phase 2  $t \in [10; 15]$  et la phase 3  $t \in ]15; 30]$ . Les phases 1 et 3 représentant l'état stationnaire du système aux températures de référence  $x_{ref} = 78^{\circ}\text{C}$  et  $x_{ref} = 77^{\circ}\text{C}$  respectivement. Sur les figures Fig.4.4, Fig.4.5,

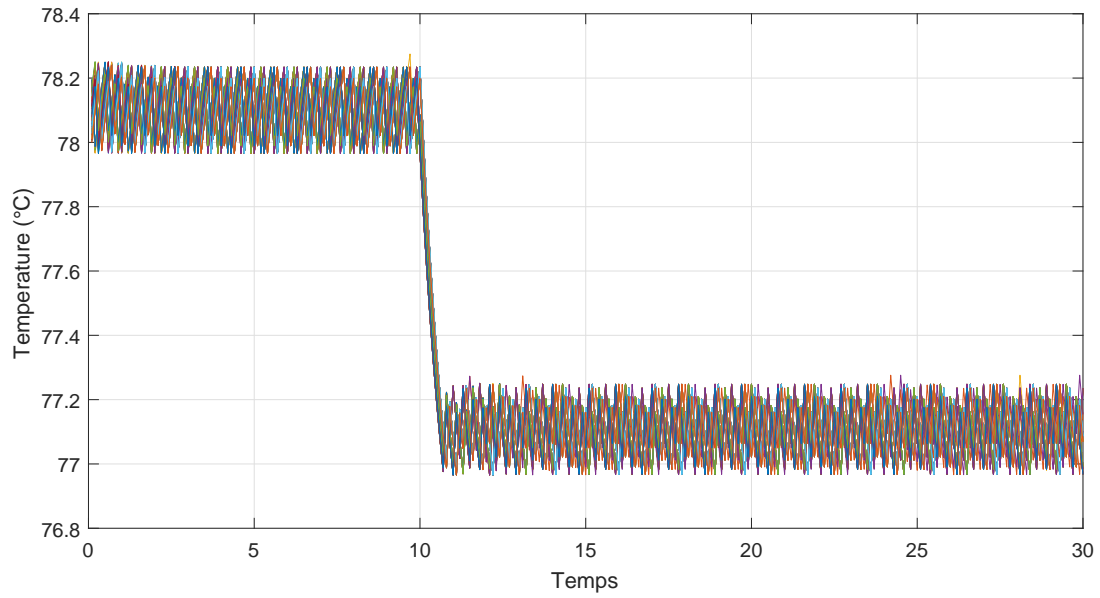


Figure 4.4 Échantillon de température de 100 systèmes dans le cas témoin

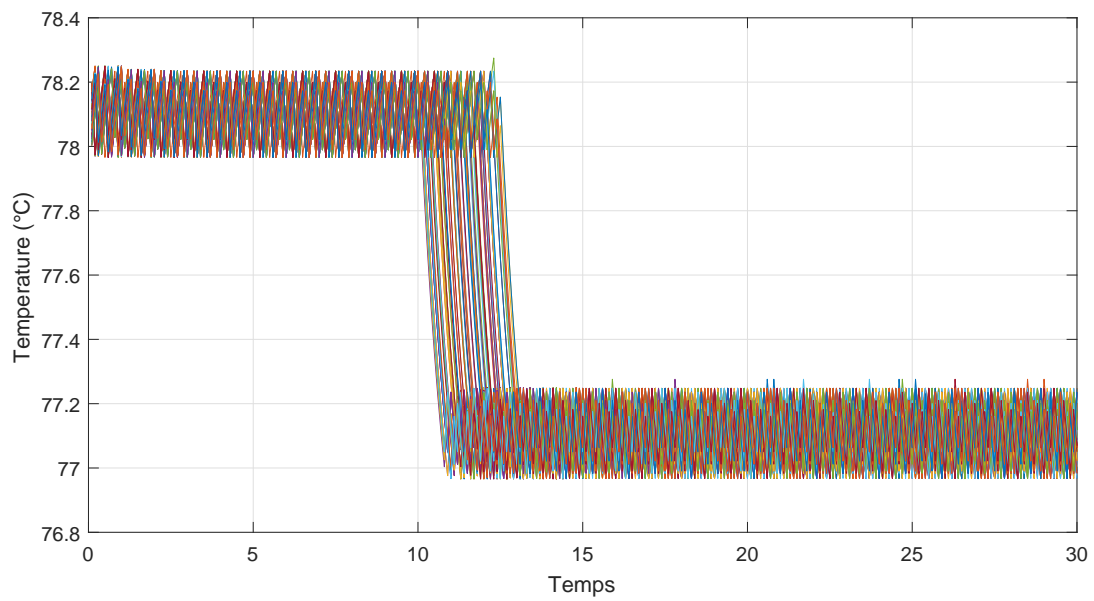


Figure 4.5 Échantillon de température de 100 systèmes dans le cas avec 2,5 unités de temps de délai dans la consigne



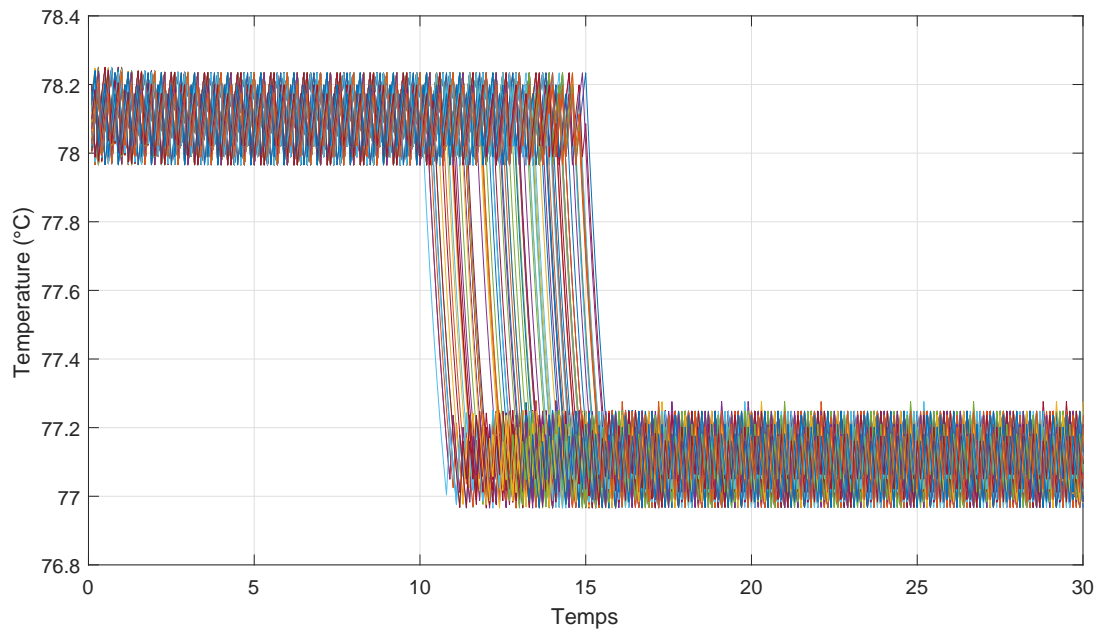


Figure 4.6 Température de 100 contrôleurs avec un délai de 5 unités de temps dans la consigne

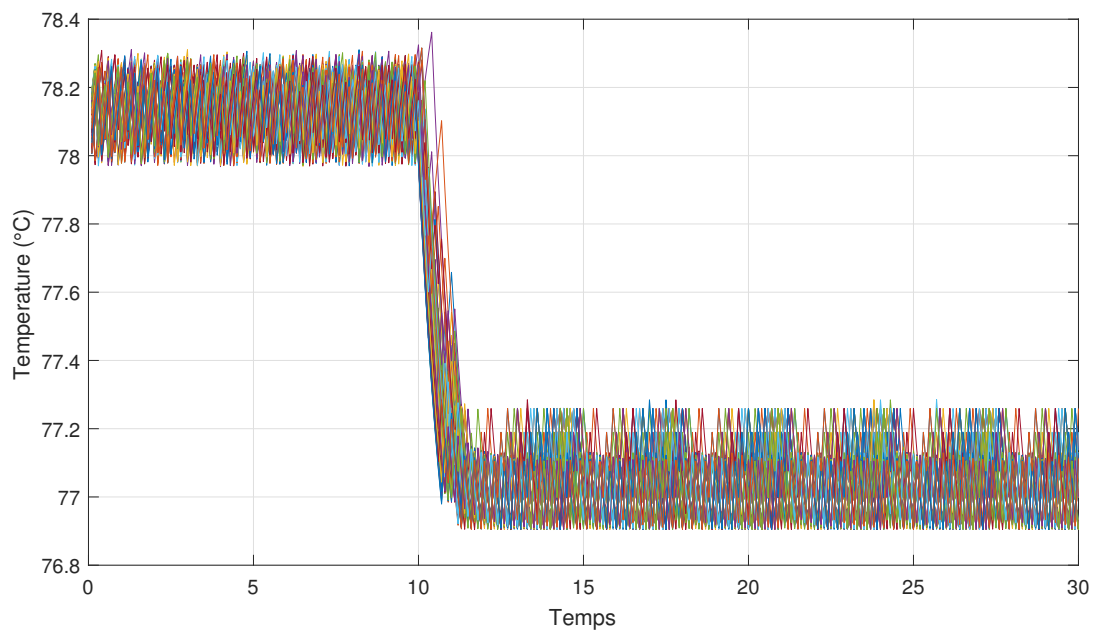


Figure 4.7 Température de 100 contrôleurs avec une pénalisation aléatoire de la matrice  $R$

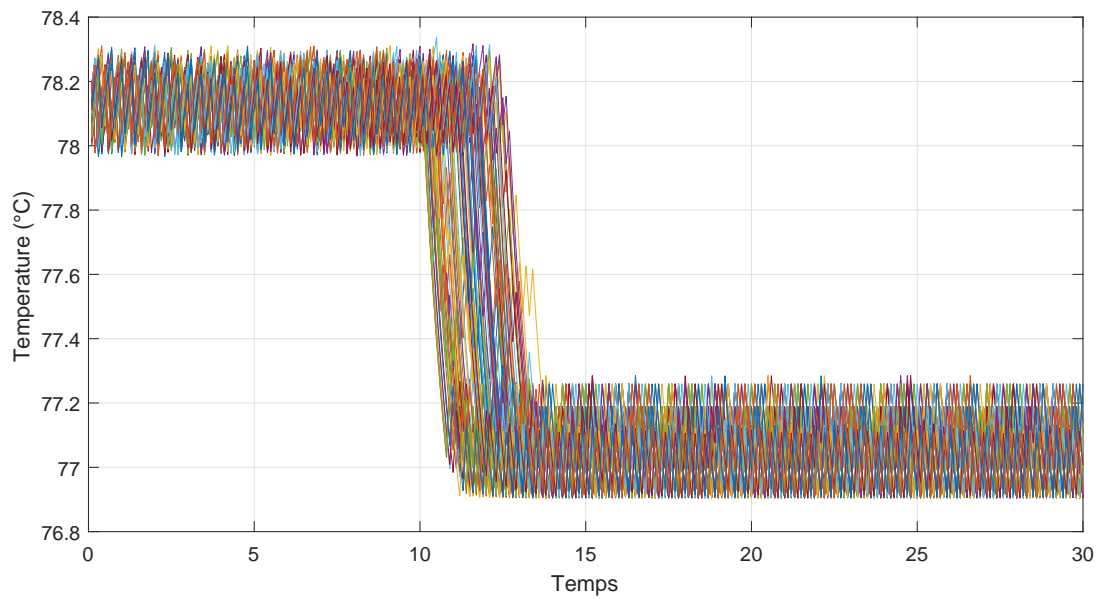


Figure 4.8 Température de 100 contrôleurs avec une pénalisation aléatoire de la matrice  $R$  et un délai de 2,5 unités de temps dans la consigne

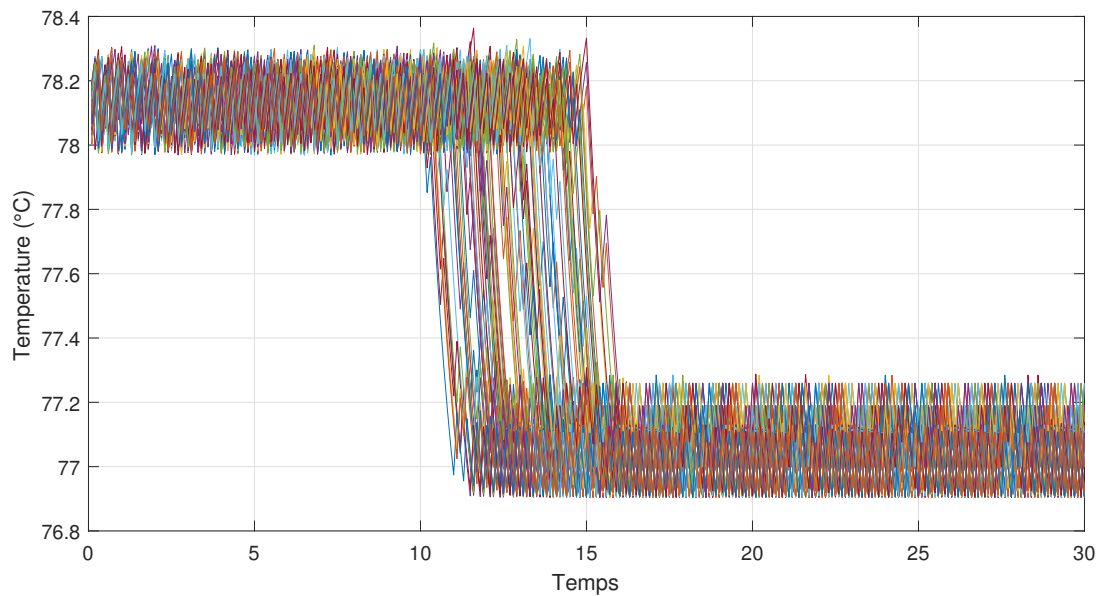


Figure 4.9 Température de 100 contrôleurs avec une pénalisation aléatoire de la matrice  $R$  et un délai de 5 unités de temps dans la consigne

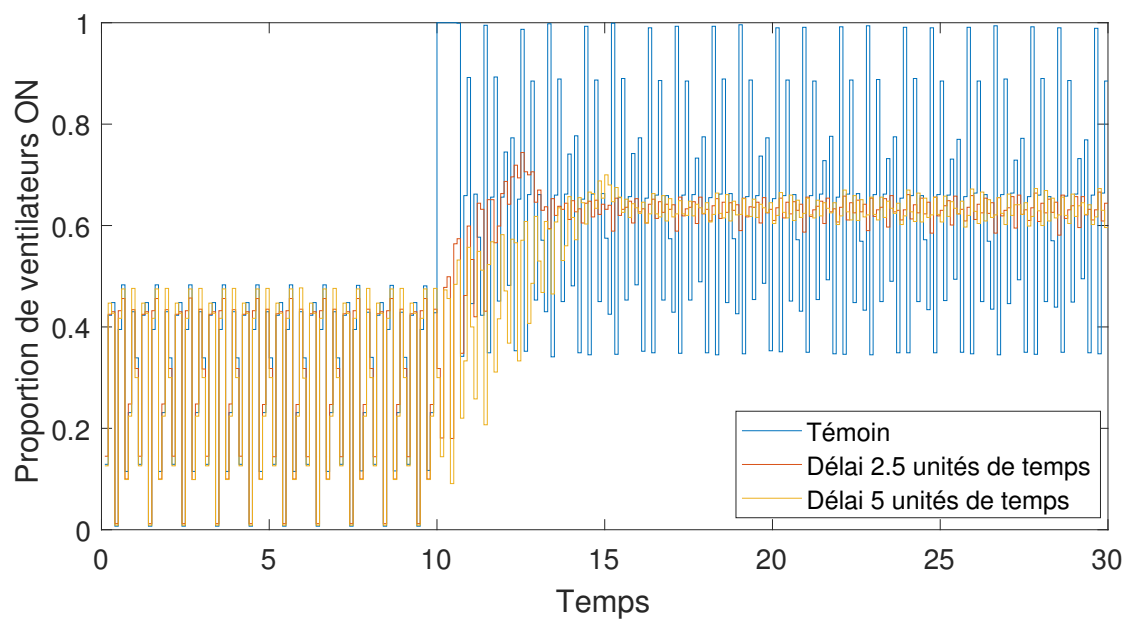


Figure 4.10 Proportion de systèmes dans l'état ON au cours du temps pour les méthodes citées

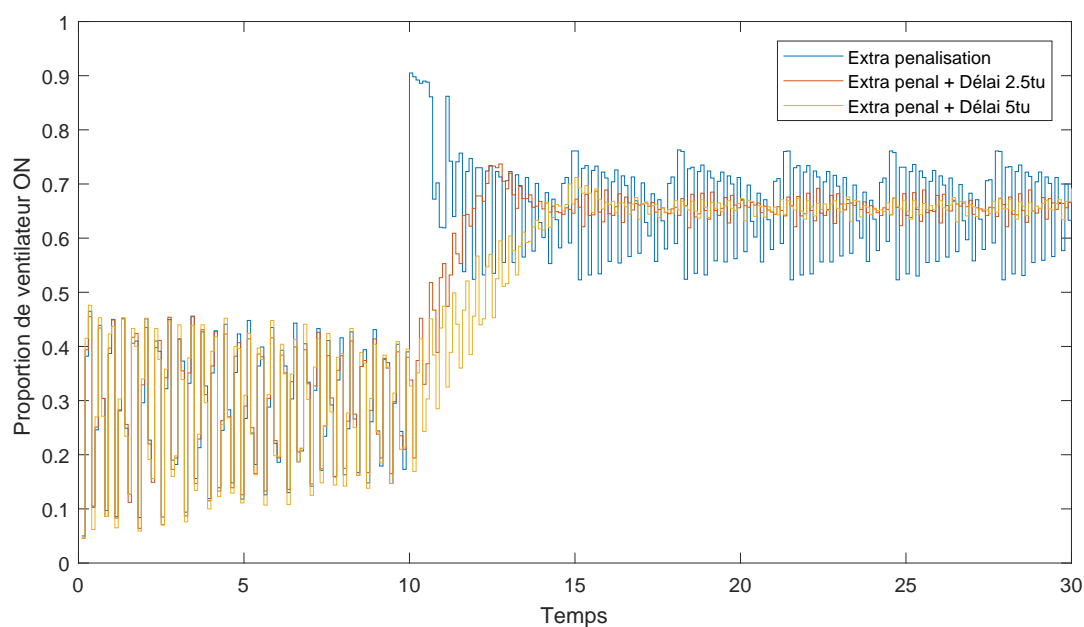


Figure 4.11 Proportion de systèmes dans l'état ON au cours du temps pour les méthodes citées

Tableau 4.2 Moyenne, écart type et dépassement pour chaque simulation

2*Cas étudié	Phase 1		Phase 3		Phase 2
	Moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type	Dépassement
Témoin	0.30	0.16	0.63	0.21	1.10
Délai 2.5ut	0.30	0.16	0.63	0.02	0.34
Délai 5.0ut	0.30	0.17	0.65	0.02	0.20
Extra P.	0.29	0.12	0.66	0.07	0.68
Extra P. + 2.5ut	0.29	0.12	0.66	0.02	0.22
Extra P. + 5.0ut	0.29	0.13	0.66	0.01	0.15

Fig.4.6, Fig.4.7, Fig.4.8, Fig.4.9 on observe que les valeurs de températures sont légèrement supérieures aux températures de références, ceci est dû à la fonction objectif qui cherche à minimiser l'énergie consommée. L'algorithme d'optimisation fonctionne en boucle ouverte mais le contrôle sur la température est en boucle fermée. On utilise donc des valeurs telles que la moyenne et l'écart type de la puissance consommée par l'ensemble de la population pour caractériser ces deux phases. L'écart type permet de quantifier les oscillations de puissance autour d'une valeur moyenne. En revanche, la phase 2 représente la phase de transition entre l'état initial et l'état final de la simulation. Pour caractériser cette phase, on utilise le dépassement afin de quantifier le pic de consommation.

Figure 4.10, les trois cas montrent d'importantes oscillations dès le départ de la simulation. Les variations sont importantes et la puissance consommée peut être quasi nulle puis presque atteindre la moitié de la valeur maximale d'une itération à l'autre du MPC. Les oscillations ne sont pas amorties dans le temps et maintiennent leur niveau. Ce phénomène est dû à l'homogénéité de la population. Ce phénomène est d'ailleurs confirmé par les mesures de la table 4.2 avec un écart type de 0.16 par rapport à la moyenne 0.30 dans la phase 1. Au temps,  $t = 10$  on a un changement d'état de référence comme montré sur 4.1. Ce changement a lieu en même temps pour tous les systèmes du cas témoin. On remarque donc un pic de puissance qui dure 0.8 unité de temps. Pendant 8 itérations, l'ensemble des systèmes est dans l'état ON. En plus des oscillations du système, c'est ce pic qu'il est important de réduire. En instaurant un délai dans l'état de référence 4.3 on permet de diffuser dans le temps ce changement d'état. Comme nous pouvons le remarquer sur 4.10, pour un délai maximal de 2,5 unités de temps, le pic de consommation de puissance atteint 0,75. Pour un délai de 5 unités de temps, le pic de consommation de puissance est de 0,7. L'introduction du délai dans l'état de référence permet de réduire de manière importante le pic de puissance du système.

Le dépassement, calculé par la formule :

$$D = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)} \quad (4.8)$$

permet de caractériser le pic de consommation. Étudiant un système fortement oscillant, on choisit de prendre pour  $y(0)$  la moyenne des valeurs de la phase 1 et pour  $y(\infty)$  la moyenne des valeurs de la phase 3. Ainsi dans le cas témoin le dépassement est de 1.10, alors qu'avec introduction de délai dans l'état de référence le dépassement est de 0.34 et 0.20 pour un délai maximum de 2,5 et 5 unités de temps respectivement. Enfin sur la phase 3, c'est-à-dire après  $t = 15$ , les oscillations de puissance sont maintenues sur le cas témoin alors que sur les deux cas avec délai aléatoire dans l'état de référence les oscillations sont très faibles. L'impression visuelle est confirmée par la valeur de l'écart type qui passe de 0.21 dans le cas témoin à 0.02 pour les deux exemples avec introduction de délai. Les résultats obtenus par la méthode de délai dans l'état de référence révèlent que celle-ci est très efficace.

Figure 4.11, est illustré l'effet de la pénalisation supplémentaire sur la commande dans la fonction objectif. Parmi les trois cas présentés, le premier illustre uniquement l'effet de la pénalisation supplémentaire de la commande dans la fonction objectif. Le second et troisième cas présenté est une combinaison de pénalisation de la commande dans la fonction objectif avec l'ajout d'un délai aléatoire dans l'état de référence. Ce délai est limité à 2,5 unités de temps et 5 unités de temps pour respectivement le deuxième et troisième cas sur la Fig. 4.11. Nous pouvons remarquer que dans la première phase de la simulation, les trois graphes ont le même comportement. En effet le système agrégé oscille fortement au début, le système est synchronisé. Au fil de la simulation, les oscillations tendent à diminuer. Le système se désynchronise. En effet en observant les valeurs de l'écart type on a 0,12 pour les deux premiers cas et 0,13 pour le dernier. Enfin d'introduire une pénalisation dans la commande permet de désynchroniser une population de systèmes. Les oscillations en phase stationnaire ont été réduites. On obtient un pic de consommation de puissance de 0.9 dans le cas de la pénalisation de la commande. Lorsqu'on ajoute un délai maximum de 2,5 et 5 unités de temps, on obtient des pics de 0,74 et 0,71. Le dépassement (4.8) vaut 0,68 dans le cas d'une pénalisation supplémentaire. L'amélioration est significative puisque dans le cas témoin il était de 1,10. Lors que l'on ajoute un délai dans l'état de référence, ce dépassement vaut 0,22 puis 0,15 pour 2,5 et 5 unités de temps de délai. Le pic de puissance est quasiment éliminé. La combinaison des deux méthodes permet donc d'obtenir d'excellents résultats. Dans la phase 3 de la simulation, on observe des oscillations de taille variable dans le cas d'une pénalisation supplémentaire de la commande. Ces oscillations sont bien moins importantes que dans le cas témoin, mais tout de même supérieures aux cas avec délai. L'écart type vaut 0,07. Lorsque

l'on ajoute un délai dans l'état de référence, les oscillations sont encore plus réduites et sont même quasi inexistantes. On obtient respectivement des valeurs d'écart type de 0,02 et 0,01 pour l'ajout d'un délai maximum de 2,5 et 5 unités de temps.

Pour conclure, les deux méthodes présentées permettent d'atteindre les objectifs de désynchronisation d'une population homogène de TCLs. Les oscillations de puissance sont fortement diminuées et les pics de puissance sont aussi largement réduits. Les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les deux méthodes sont combinées. Ce sont dans ces cas-là que les pics de puissance sont les plus faibles et aussi que les oscillations de puissance sont les moins importantes. Les méthodes proposées sont des méthodes décentralisées, qui par conséquent ne nécessitent l'existence d'aucun superviseur, ni d'aucune communication entre les contrôleurs. En revanche cette désynchronisation se fait au prix d'un ralentissement du temps de réaction à la consigne initiale dans le cas où on introduit un délai dans l'état de référence. Dans le cadre de ce projet il était important de développer deux méthodes décentralisées afin de réduire la synchronisation des systèmes, pour tester ces méthodes nous avons joué en faisant varier la température de référence et en observant la puissance agrégée de l'ensemble des systèmes comme étant une conséquence de ceci. Pour la suite du projet, il serait intéressant d'inverser ce processus. C'est-à-dire d'utiliser un contrôleur de niveau supérieur qui aurait pour objectif de minimiser l'erreur entre la puissance agrégée des systèmes et une fonction donnée. Ce contrôleur agirait selon les besoins sur la température de référence des systèmes. Ainsi la température de référence est une variable d'ajustement afin de réduire ou augmenter la consommation de puissance en fonction de l'offre et de la demande. Les simulations ont été réalisées avec 1000 contrôleurs indépendants pendant 300 itérations. Les méthodes de simulation sont très coûteuses en termes de calcul et il est intéressant d'adapter un modèle PDE aux simulations faites avec le MPC. Le modèle PDE permet de décrire l'état du système avec deux équations différentielles.

## CHAPITRE 5    MODÈLE D'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES POUR AGRÉGATION DE CHARGE D'UNE LARGE POPULATION DE SYSTÈMES THERMOSTATIQUES CONTRÔLES PAR COMMANDE PRÉDICTIVE

Dans le chapitre 4 a été étudié une population de 1000 contrôleurs indépendants. Ces simulations sont coûteuses d'un point de vue calculatoire, car il faut simuler individuellement chaque entité. Il est intéressant de voir que des modèles PDE sont utilisés pour simuler un ensemble de systèmes thermostatiques. Parmi les modèles les plus couramment utilisés, on retrouve le modèle PDE utilisant une équation de transport, et le modèle PDE utilisant l'équation de Fokker-Planck. Ce modèle de Fokker-Planck est une équation de transport à laquelle on ajoute un terme diffusif pour mimer l'hétérogénéité d'une population par exemple. Il est intéressant de noter qu'il est possible de simuler un ensemble de charges grâce à deux équations aux dérivées partielles.

### 5.1    Modèle agrégé d'équation aux dérivées partielles

Nous nous plaçons dans le cas d'une large population de charge contrôlée par des contrôleurs MPC. L'état de ses charges est ON/OFF. Soit  $x_i$  la température du  $i$ -ème système de la population. Les variations de température de  $x_i$  sont décrit par l'équation dynamique suivante

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a(T^a - x_i(t)) + Ed_i(t) + Bu_i(t), i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

où le signal de commutation  $u_i(t)$  est défini comme suit :

$$u_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{ON pour refroidir;} \\ 0, & \text{OFF autrement.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Il doit être remarqué que dans la formulation de ce travail, le signal de commutation  $u$  peut être généré par n'importe quel processus, en particulier par un contrôleur MPC pour lesquels les commutations apparaissent de manière arbitraire au sein d'une plage de température. C'est une extension du contrôle thermostatique qui est utilisé dans un vaste domaine de problèmes dans la littérature existante. Le modèle PDE permet de représenter avec deux équations différentielles le comportement global de la population dans leur état ON et OFF. Pour cela notons  $w_{ON}(x, t)$  et  $w_{OFF}(x, t)$  la densité de systèmes [Fraction de composants/°C] à la température  $x$  et au temps  $t$ , pour les états ON et OFF respectivement. Un schéma

représentant les deux distributions de systèmes est présenté Fig. 5.1, ces distributions se déplacent en fonction de la température des systèmes au cours du temps suivant leur état de fonctionnement. La distribution ON se déplace des températures "hautes" aux températures "basses". La distribution de systèmes OFF se déplace des températures "basses" aux températures "hautes". Ceci est conforme à l'intuition puisque lorsqu'un système est dans l'état ON, sa température diminue, car nous sommes en cas de refroidissement et lorsqu'un système est dans l'état OFF sa température augmente. Premièrement, intéressons-nous à la distribution de systèmes dans l'état ON. Un bilan de flux sur un segment de température de taille infinitésimal est effectué. Notons  $F(x, t)$  le flux de charge au point  $(x, t)$  et considérons un segment infinitésimal de taille  $dx$  comme nous pouvons le voir Fig. 5.2. Puis pour une population homogène de charges, le flux entrant et sortant des systèmes ON est :

$$F(x, t) = \alpha_{ON}(x)w_{ON}(x, t), \quad (5.3a)$$

$$F(x + dx, t) = \alpha_{ON}(x + dx)w_{ON}(x + dx, t), \quad (5.3b)$$

où

$$\alpha_{ON}(x, t) = a(T^a - x) + Ed_i + B. \quad (5.4)$$

Notons  $\delta_{OFF \rightarrow ON}(x, t)$  et  $\delta_{ON \rightarrow OFF}(x, t)$  les flux additionnels dû aux commutations des contrôleurs MPC. Puis, en se basant sur la loi de conservation de flux, on obtient pour un intervalle de température et de temps infinitésimal  $dt$  :

$$(w_{ON}(x, t + dt) - w_{ON}(x, t)) dx = (F(x + dx, t) - F(x, t)) dt + (\delta_{OFF \rightarrow ON}(x, t) - \delta_{ON \rightarrow OFF}(x, t)) dx dt. \quad (5.5)$$

En prenant  $dx \rightarrow 0$  et  $dt \rightarrow 0$ , il vient :

$$\frac{\partial w_{ON}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_{ON}(x)w_{ON}(x, t)) + \delta_{OFF \rightarrow ON}(x, t) - \delta_{ON \rightarrow OFF}(x, t). \quad (5.6)$$

De manière similaire, on obtient l'équation de transport permettant de représenter le comportement des systèmes dans l'état OFF, qui est :

$$\frac{\partial w_{OFF}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_{OFF}(x)w_{OFF}(x, t)) + \delta_{ON \rightarrow OFF}(x, t) - \delta_{OFF \rightarrow ON}(x, t), \quad (5.7)$$

où

$$\alpha_{OFF}(x) = a(T^a - x) + Ed_i, \quad (5.8)$$



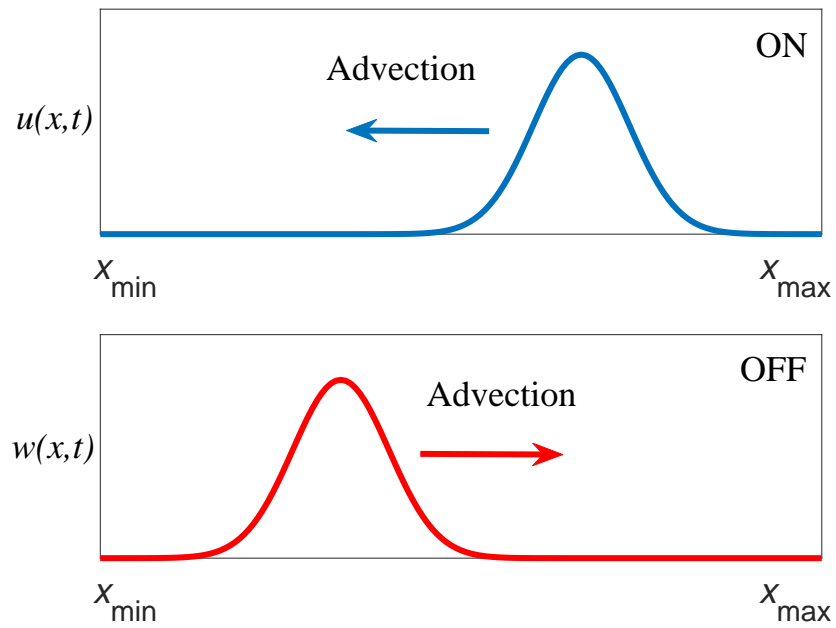


Figure 5.1 Distribution des systèmes dans l'état ON et OFF.

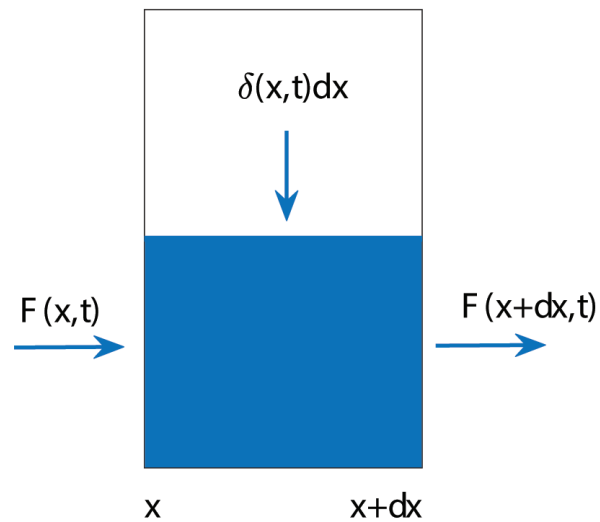


Figure 5.2 Flux entrant et sortant sur un segment de température infinitésimal.

et  $\delta_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(x, t)$  représente le flux additionnel dû aux commutations des systèmes passant de l'état ON à OFF au point  $(x, t)$ . Pour ce problème, on suppose que le flux se conserve. En conséquence, au point  $(x, t)$  on note  $\delta_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(x, t) - \delta_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(x, t)$ . Donc, la dynamique des deux distributions peut être exprimée avec par le modèle PDE, qui est un système couplé, suivant :

$$\frac{\partial w_{\text{ON}}}{\partial t}(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_{\text{ON}}(x) w_{\text{ON}}(x, t)) + \delta(x, t), \quad (5.9a)$$

$$\frac{\partial w_{\text{OFF}}}{\partial t}(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_{\text{OFF}}(x) w_{\text{OFF}}(x, t)) - \delta(x, t), \quad (5.9b)$$

$$x \in (x_{\min}, x_{\max}), \quad t \in (0, +\infty),$$

avec  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$  respectivement les températures minimales et maximales atteignables par les systèmes. La fonction  $\delta(x, t)$  représente les commutations nettes entre les deux distributions. Pour déterminer une commutation à l'instant  $t$  il faut s'intéresser à la différence  $u(t + \Delta t) - u(t)$  :

$$u_i(t + \Delta t) - u_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{OFF} \rightarrow \text{ON}; \\ 0, & \text{Même état}; \\ -1, & \text{ON} \rightarrow \text{OFF}. \end{cases} \quad (5.10)$$

On définit ensuite les ensembles  $X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}$  et  $X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}$  comme les ensembles des températures des systèmes commutant de l'état OFF à ON et de l'état ON à OFF respectivement. Ainsi on peut les définir comme :

$$X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t) = \{x_i(t) | (u_i(t + \Delta t) - u_i(t)) > 0\}, \forall i \in [1 : N], \quad (5.11a)$$

$$X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t) = \{x_i(t) | (u_i(t + \Delta t) - u_i(t)) < 0\}, \forall i \in [1 : N]. \quad (5.11b)$$

Pour chaque unité de temps on obtient ainsi 2 ensembles qui nous permettent de définir à l'instant  $t$  les fonctions de densité de probabilité des vecteurs  $X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t)$  et  $X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t)$ . On définit donc :  $f_{X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t)}(x, t)$  et  $f_{X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t)}(x, t)$  les fonctions de densité de commutation de l'état OFF à ON et ON à OFF respectivement. Ces densités sont calculées en réalisant l'histogramme des ensembles  $X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t)$  et  $X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t)$  respectivement. À partir de cela nous pouvons exprimer la fonction  $\delta(x, t)$  comme étant :

$$\delta(x, t) = f_{X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t)}(x, t) |X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t)| - f_{X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t)}(x, t) |X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t)|, \quad (5.12)$$

avec  $|X_{\text{OFF} \rightarrow \text{ON}}(t)|$  et  $|X_{\text{ON} \rightarrow \text{OFF}}(t)|$  le cardinal de leur vecteur respectif. Un exemple de fonction  $\delta(x, t)$  est représenté Fig. 5.3, on remarque des commutations au début de la simulation autour de  $78^\circ\text{C}$  puis autour de  $77^\circ\text{C}$  à la fin de la simulation. Cela correspond bien au cas

simulé avec le contrôleur MPC. Cette fonction est discontinue, en effet elle est toujours égale à 0 au milieu des temps d'échantillonnage des contrôleurs MPC. Enfin le contrôleur MPC fonctionnant en temps discret, les systèmes ne peuvent donc atteindre les frontières  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ . Les conditions aux frontières du contrôleur MPC sont :

Pour la densité  $w_{ON}$  :

$$w_{ON}(x_{\min}, t) = w_{ON}(x_{\max}, t) = 0, \forall t \in (0, +\infty), \quad (5.13a)$$

Pour la densité  $w_{OFF}$  :

$$w_{OFF}(x_{\max}, t) = w_{OFF}(x_{\min}, t) = 0, \forall t \in (0, +\infty), \quad (5.13b)$$

avec les conditions initiales :

$$w_{ON}(x, 0) = w_{ON}^0, \quad w_{OFF}(x, 0) = w_{OFF}^0, \quad \forall x \in (x_{\min}, x_{\max}). \quad (5.14)$$

Pour évaluer la validité du modèle PDE agrégé donné par (5.9), et (5.13), nous avons les propriétés suivantes du système. Soit la taille de la population modélisée par (5.9), et (5.13) :

$$N_{ag}(t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (w_{ON}(x, t) + w_{OFF}(x, t)) dx.$$

Nous avons ensuite

$$\frac{dN_{ag}}{dt}(t) = 0.$$

Cette propriété peut être prouvée en suivant la preuve de la proposition 1 de l'article de Le Floch ([71]).

Dans la formulation proposée pour ce travail, la température de référence est la même pour tous les systèmes de la population. Cependant, il est important de noter que la plage de température dans laquelle se situe les systèmes, aussi appelée zone de confort, peut être personnalisée pour chaque contrôleur en fonction des performances attendues. Cette personnalisation est très différente du PDE modèle classique basé sur des systèmes thermostatiques où les températures de commutations sont identiques pour tous les systèmes de la population.

## 5.2 Implémentation du modèle agrégé d'équation aux dérivées partielles

Pour résoudre une telle équation (5.9), il est important d'être attentif aux erreurs numériques qui peuvent venir nuire au calcul. Pour notre cas, nous choisissons des approximations stables afin que notre système ne diverge pas. L'équation de transport (5.9) est bien documentée dans la littérature et plusieurs méthodes existent pour la résoudre. Pour calculer (5.9), la formule

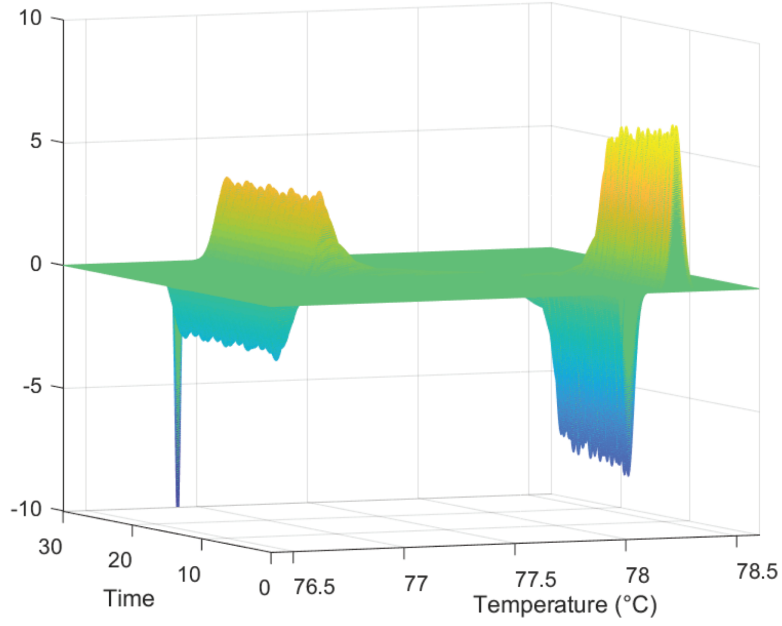


Figure 5.3 Exemple de fonction  $\delta(x, t)$ .

au premier ordre de Taylor est utilisée :

$$\frac{\partial w_{ON}}{\partial t}(x, t) = \frac{w_{ON}(x, t + \Delta t) - w_{ON}(x, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t); \quad (5.15)$$

et

$$\frac{\partial \alpha_{ON} w_{ON}}{\partial x}(x, t) = \frac{\alpha_{ON}(x + \Delta x) w_{ON}(x + \Delta x, t) - \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (5.16)$$

En utilisant (5.15) et (5.16) dans l'équation (5.9a), la valeur de  $w_{ON}$  au temps  $t + dt$  peut être calculée :

$$\begin{aligned} w_{ON}(x, t + \Delta t) = w_{ON}(x, t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{ON}(x + \Delta x) w_{ON}(x + \Delta x, t) - \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t)) \\ + \delta(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Cette méthode numérique est appelée un schéma explicite décentré de premier ordre vers l'avant (5.17), et ce schéma est stable uniquement si la condition suivante est vérifiée :

$$-1 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{ON} < 0. \quad (5.18)$$

Autrement le système diverge et aucune solution n'est trouvée. Pour  $w_{OFF}$ , comme le signe de  $\alpha_{OFF}$  est différent de celui de  $\alpha_{ON}$ , nous ne pouvons pas utiliser ce même schéma pour résoudre (5.9b). Nous allons donc utiliser un schéma explicite décentré de premier ordre vers l'arrière cette fois-ci. Cela donne :

$$\frac{\partial w_{OFF}}{\partial t}(x, t) = \frac{w_{OFF}(x, t + \Delta t) - w_{OFF}(x, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(t); \quad (5.19)$$

et

$$\frac{\partial \alpha_{OFF} w_{OFF}}{\partial x}(x, t) = \frac{\alpha_{ON}(x) w_{OFF}(x, t) - \alpha_{OFF}(x - \Delta x) w_{OFF}(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(x). \quad (5.20)$$

En utilisant (5.19) et (5.20) dans l'équation (5.9b), la valeur de  $w_{OFF}$  au temps  $t + \Delta t$  peut être calculée :

$$\begin{aligned} w_{OFF}(x, t + \Delta t) = w_{OFF}(x, t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{OFF}(x) w_{OFF}(x, t) - \alpha_{OFF}(x - \Delta x) w_{OFF}(x - \Delta x, t)) \\ - \delta(x, t) + \mathcal{O}(x, t), \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec la condition suivante qui doit être vérifiée :

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{OFF} < 1. \quad (5.22)$$

On a finalement, à résoudre les équations (5.17) et (5.21), qui ont  $\delta(x, t)$  comme entrée. Prenons comme entrée la fonction  $\delta(x, t)$  représentée Fig. 5.3. Cette courbe est obtenue par simulations de Monte-Carlo. Nous avons comme solution à l'équation 5.17, la surface représentée Fig. 5.4. La solution partielle 5.5, ne se concentre que sur les 4 premières itérations du contrôleur MPC. On a donc ainsi une meilleure compression du phénomène. En effet, nous observons que les distributions de température dans l'état ON sont des ondes se déplaçant des températures hautes, aux températures plus basses, et ainsi de suite. La fonction  $\delta(x, t)$  qui représente les commutations annule les ondes puis les recrée plus haut sur le plan observé. Les résultats pour l'état OFF sont montrés ci-après, on observe le même type d'ondes, cette fois-ci se déplaçant des températures basses aux températures hautes. La solution à l'équation 5.21 ayant 5.12 en entrée est présentée Fig. 5.5. La solution partielle montrant 4 itérations du processus est décrite Fig. 5.7.

Les ondes représentent ici les proportions de systèmes dans l'état ON ou OFF. À chaque instant en faisant l'intégrale sur la température de ces distributions on obtient la proportion de systèmes dans l'état ON ou OFF. La proportion agrégée  $P_{PDE}$  de systèmes dans l'état

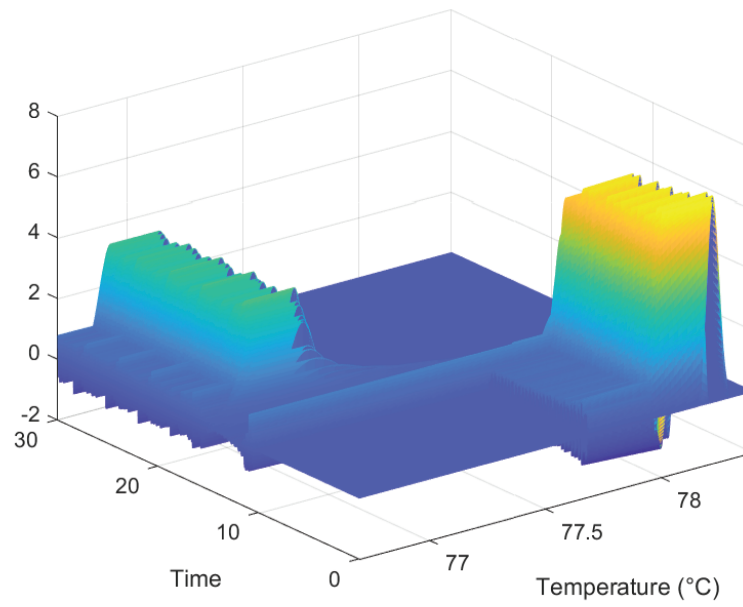


Figure 5.4 Surface solution de (5.17) avec l'entrée 5.3.

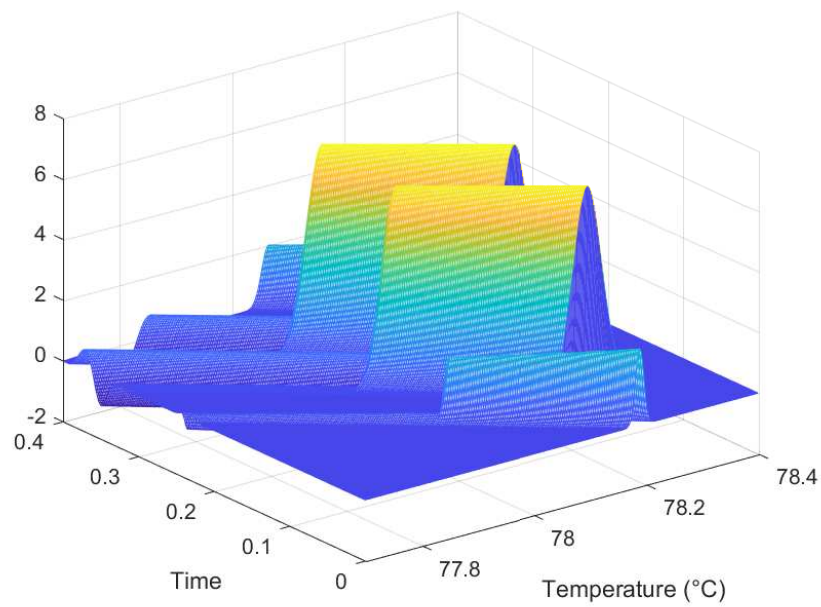


Figure 5.5 Solution partielle de (5.17) avec l'entrée 5.3.

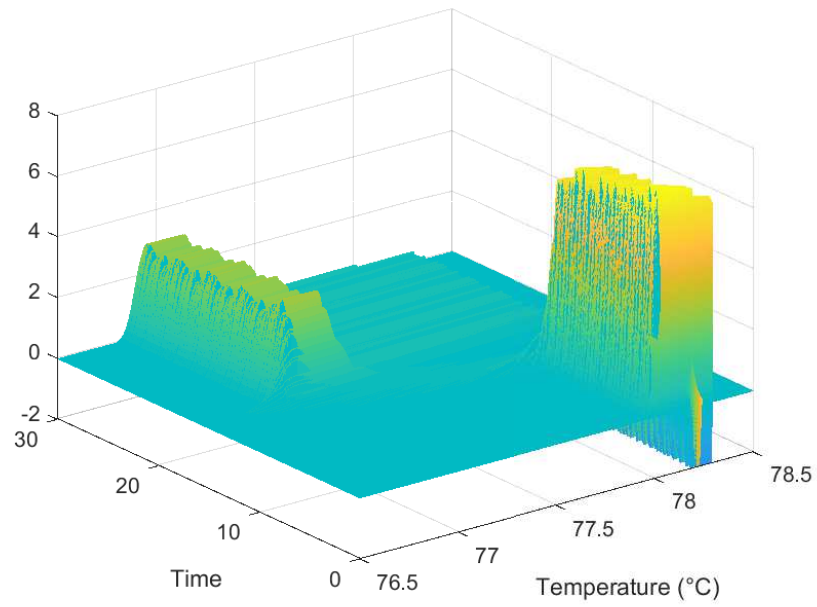


Figure 5.6 Surface solution de (5.17) avec l'entrée 5.3.

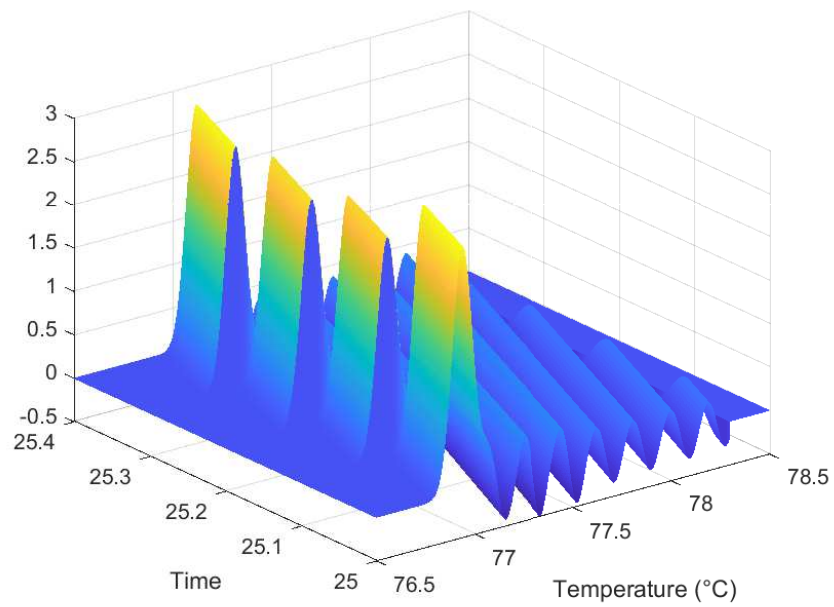


Figure 5.7 Solution partielle de (5.17) avec l'entrée 5.3.

ON peut être calculé de la façon suivante :

$$P_{PDE}(t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} w_{ON}(x, t) dx = 1 - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} w_{OFF}(x, t) dx. \quad (5.23)$$

On représente la consommation de puissance au cours du temps pour les simulations MPC et pour les modélisations PDE sur les Fig. 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 et 5.13. Pour ce faire on utilise les équations 4.7 et 5.23.

Pour chaque scénario simulé avec le contrôleur MPC on utilise le modèle PDE afin de comparer les résultats obtenus. Le scénario témoin est visible Fig. 5.8, lorsqu'on ajoute un délai maximal de 2,5 et 5 unités de temps on a respectivement les résultats donnés Fig. 5.9 et Fig. 5.10. Avec l'ajout d'une pénalisation aléatoire sur la commande on obtient la solution donnée Fig. 5.11, puis on combine les deux méthodes pour avoir en plus de la pénalisation de la commande, un délai aléatoire maximale de 2,5 et 5 unités de temps, respectivement sur Fig. 5.12 et 5.13. Visuellement, on remarque que le modèle PDE suit dans l'ensemble presque parfaitement les simulations MPC ce qui est très satisfaisant. La table 5.1 permet de confirmer cette impression visuelle. En effet pour chaque phase de simulation, on calcule la moyenne de l'erreur et l'écart type de l'erreur. On remarque que ces valeurs sont minimales et nous permettent de conclure que la simulation PDE permet de caractériser de façon adéquate des simulations de type Monte-Carlo.

### 5.3 Modèle pour une population hétérogène

Le système d'équations de transport (5.9) permet de modéliser une population homogène de systèmes. Le cas d'une population homogène étant rare en réalité il est intéressant de se poser dans un cas de population hétérogène. Pour modéliser l'hétérogénéité d'une population, il est nécessaire d'ajouter un terme diffusif sur la température afin de modéliser au mieux l'hétérogénéité du système. Dans ce cas, on parle d'équation de Fokker-Planck et le modèle

Tableau 5.1 Moyenne  $\mu$  et écart type  $\sigma$  de l'erreur entre MPC et PDE pour chaque simulation

2*Cas étudié	Phase 1		Phase 2		Phase 3	
	$\mu \times 10^{-3}$	$\sigma \times 10^{-3}$	$\mu \times 10^{-3}$	$\sigma \times 10^{-3}$	$\mu \times 10^{-3}$	$\sigma \times 10^{-3}$
Témoin	-13.7	50.2	-2.9	9.4	-4.3	10.4
Délai 2.5 ut	-6.1	56.9	-18.8	30.1	-4.1	6.3
Délai 5.0 ut	-16.7	70.1	2.6	39.7	-4.6	8.7
Extra P.	4.2	6.5	-8.9	17.7	-17.2	14.9
Extra P. + 2.5 ut	4.3	6.5	-12.8	20.4	-17.1	7.4
Extra P. + 5.0 ut	4.2	6.6	7.6	26.0	16.0	11.4



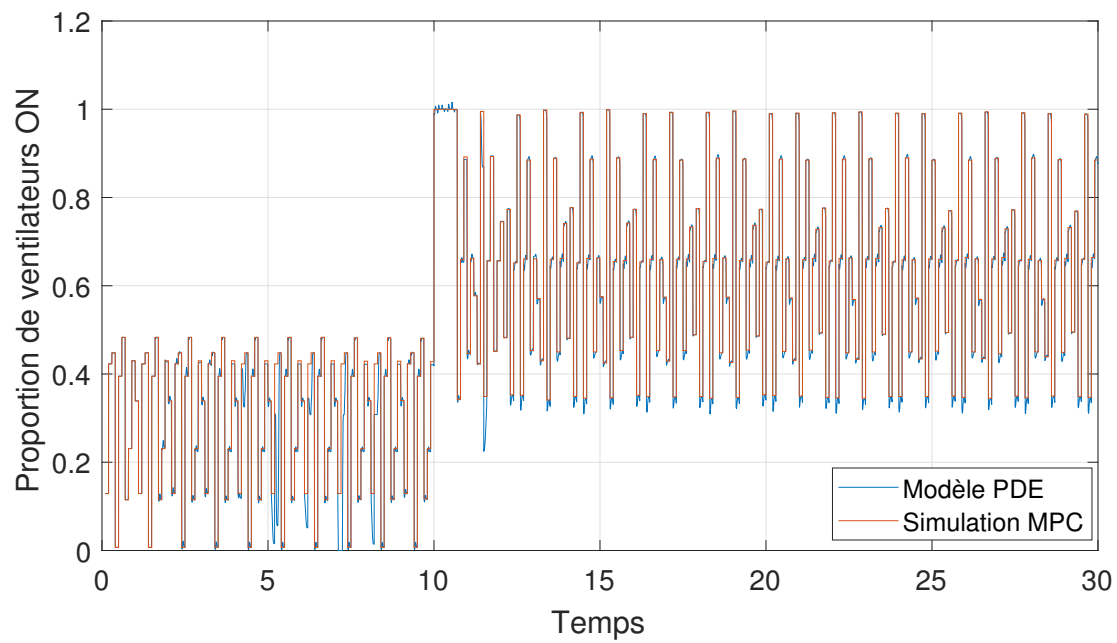


Figure 5.8 Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas témoin.

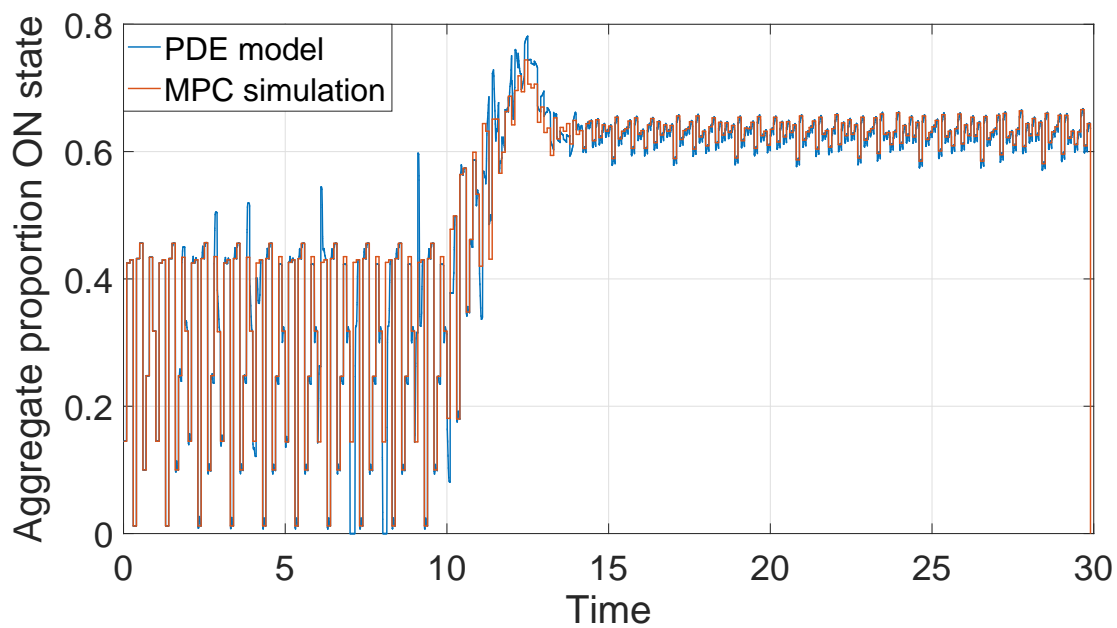


Figure 5.9 Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 2,5 unités de temps.

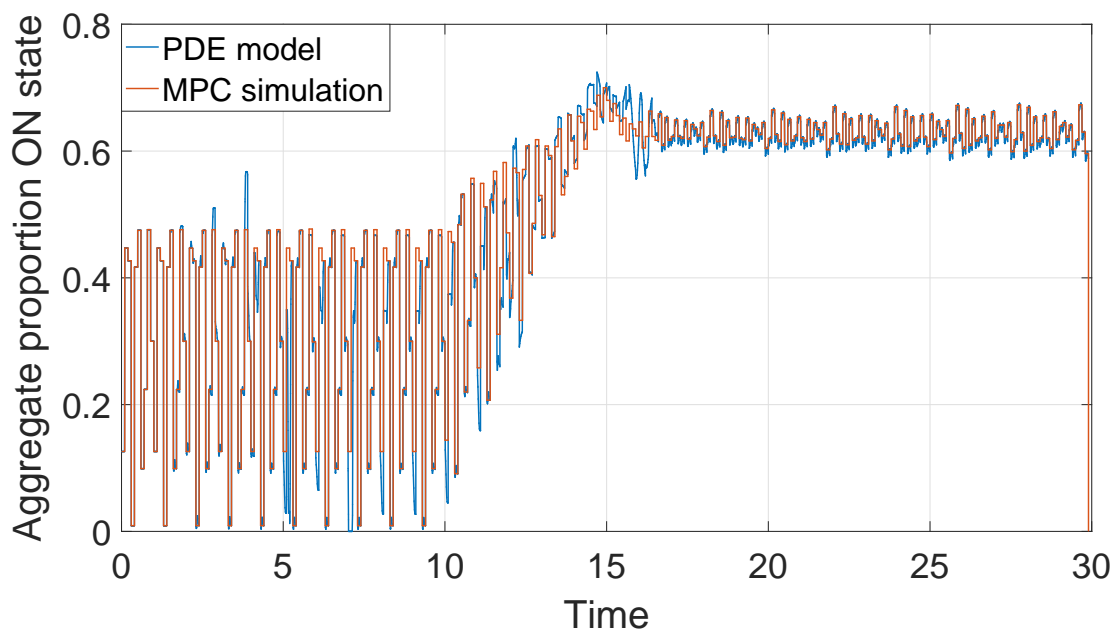


Figure 5.10 Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 5 unités de temps.

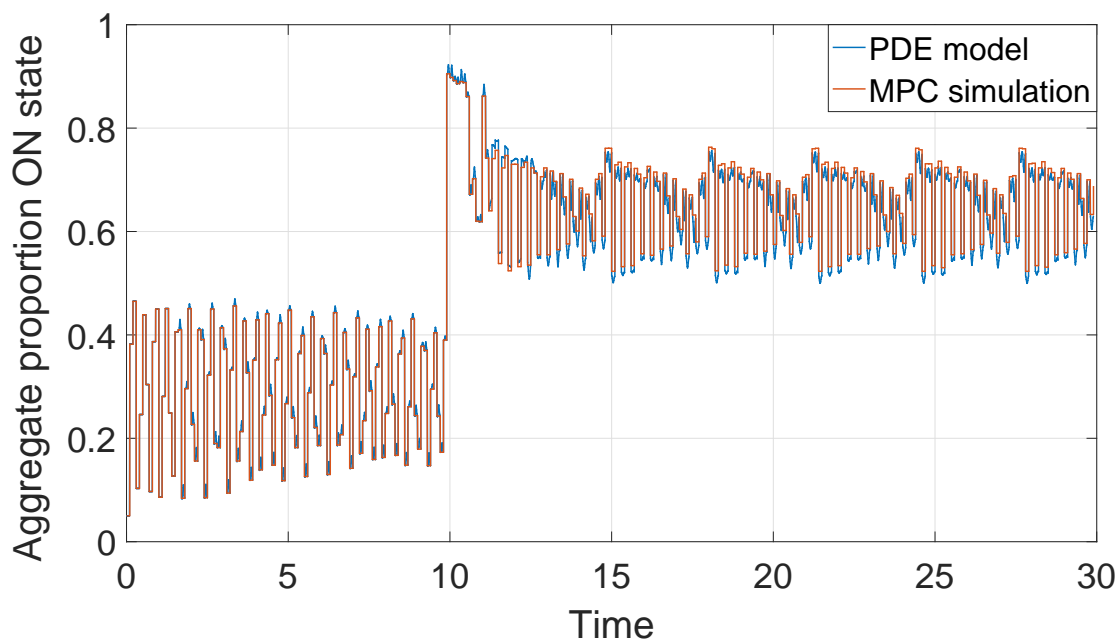


Figure 5.11 Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec pénalisation dans la commande.

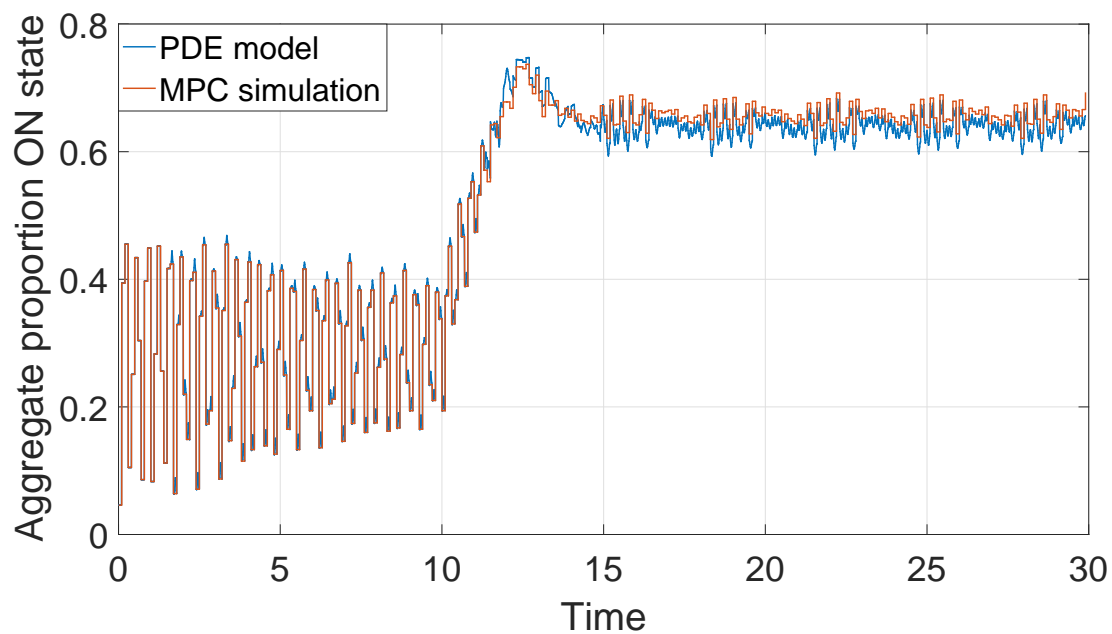


Figure 5.12 Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 2,5 unités de temps et pénalisation dans la commande.

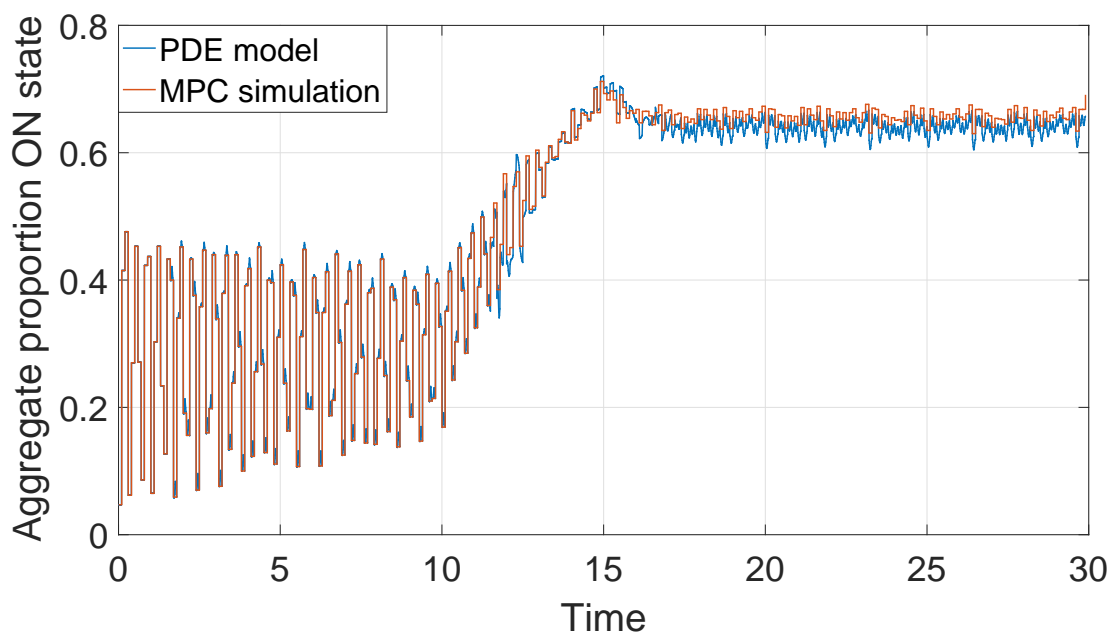


Figure 5.13 Comparaison de puissance consommée au cours du temps pour le modèle PDE et MPC, cas avec délai maximal de 5 unités de temps et pénalisation dans la commande.

est le suivant :

$$\frac{\partial w_{ON}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{ON}(x)w_{ON}(x, t)) + \beta \frac{\partial^2 w_{ON}}{\partial x^2}(x, t) + \delta(x, t), \quad (5.24a)$$

$$\frac{\partial w_{OFF}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_{OFF}(x)w_{OFF}(x, t)) + \beta \frac{\partial^2 w_{ON}}{\partial x^2}(x, t) - \delta(x, t), \quad (5.24b)$$

$$x \in (x_{\min}, x_{\max}), \quad t \in (0, +\infty),$$

où  $\beta$  est le coefficient de diffusion, et avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$\beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x_{\min}, t) - \alpha_{ON}(x_{\min})w_{ON}(x_{\min}, t) = 0, \quad (5.25a)$$

$$\beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x_{\max}, t) - \alpha_{ON}(x_{\max})w_{ON}(x_{\max}, t) = 0, \quad (5.25b)$$

$$\beta \frac{\partial w_{OFF}}{\partial x}(x_{\min}, t) - \alpha_{OFF}(x_{\min})w_{OFF}(x_{\min}, t) = 0, \quad (5.25c)$$

$$\beta \frac{\partial w_{OFF}}{\partial x}(x_{\max}, t) - \alpha_{OFF}(x_{\max})w_{OFF}(x_{\max}, t) = 0, \quad (5.25d)$$

$$w_{ON}(x, 0) = w_{ON}^0, w_{OFF}(x, 0) = w_{OFF}^0. \quad (5.25e)$$

Ces conditions sont nécessaires pour que les EDP respectent la condition de conservation de la masse. Soit, la taille de la population modélisée par (5.24), et (5.25) est :

$$N_{\text{ag}}(t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (w_{ON}(x, t) + w_{OFF}(x, t)) dx.$$

Nous avons ensuite

$$\frac{dN_{\text{ag}}}{dt}(t) = 0.$$

Afin de tester ce modèle de Fokker-Planck, on génère une population hétérogène de TCL. Pour déterminer le coefficient de diffusion de notre système on utilise un estimateur en premier lieu, qui nous donne une valeur estimée du coefficient  $\beta$ , puis expérimentalement cette valeur de  $\beta$  est affinée. L'estimateur utilisé est décrit dans la sous-section suivante.

### 5.3.1 Simulation et identification du modèle hétérogène

Dans la section précédente, nous avons montré que l'équation de transport peut modéliser une population de systèmes contrôlés par MPC. Pour montrer que cette méthode fonctionne aussi avec le modèle de Fokker-Planck et une population hétérogène de systèmes nous allons utiliser un modèle thermique qui a déjà été validé par l'équation de Fokker-Planck et contrôle thermostatique. Le modèle est développé est le suivant ([1]) :

$$\dot{T}_i(t) = \frac{1}{R_i C_i} [T_{\infty,i}(t) - T_i(t) - s_i(t) R_i P_i], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.26)$$

$$s_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{Etat ON;} \\ 0, & \text{Etat OFF.} \end{cases} \quad (5.27)$$

$T_i(t)$  est l'état du  $i$ -ème système et  $T_{\infty,i}(t)$  est la température ambiante. Avec  $C_i$  la capacité thermique,  $R_i$  la résistance thermique et  $P_i$  la puissance de réfrigération du système dans l'état ON.  $T_{min,i}$  et  $T_{max,i}$  sont les températures minimales et maximales que peut atteindre le système. Elles sont définies de la façon suivante :

$$T_{min,i} = T_{ref,i} - \frac{\Delta T}{2}, \quad T_{max,i} = T_{ref,i} + \frac{\Delta T}{2},$$

avec  $\Delta T$  la plage de température admissible. L'ensemble des paramètres ainsi que leur valeur sont donnés Table 5.2. Dans le cas d'une population homogène, tous les paramètres sont choisis égaux entre les systèmes, pour une population hétérogène on fait varier la capacité thermique des systèmes. Chacun possède une capacité thermique différente prise dans une distribution normale.

Tableau 5.2 Paramètres du système homogène et hétérogène du modèle de Moura ( [1])

Paramètres	Description [Unité]	Homogène	Hétérogène
$R$	Résistance thermique [°C/kW]	2	2
$C$	Capacité thermique [kWh/°C]	10	$\sim \mathcal{N}(10,1)$
$P$	Puissance thermique [kW]	14	14
$T_{\infty}$	Température ambiante [°C]	32	32
$T_{ref}$	Température de référence [°C]	20	20
$\Delta T$	Plage de température accessible [°C]	1	1

Afin de simuler le modèle présenté, nous nous sommes intéressés à 3 scénarios. Les différents scénarios sont détaillés ci-dessous :

- Cas de 1000 contrôleurs indépendants dans une population homogène sous commande prédictive
- Cas de 1000 contrôleurs indépendants dans une population hétérogène sous commande prédictive
- Cas de 1000 contrôleurs indépendants dans une population hétérogène sous commande prédictive avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande.

Les surfaces solutions pour le cas d'une population homogène sont données Fig. 5.14 et 5.15 pour les profils ON et OFF respectivement. En parallèle de ces profils on a tracé Fig. 5.17

la puissance agrégée des contrôleurs MPC et PDE. On observe que la puissance agrégée du PDE suit bien la dynamique du contrôleur MPC. Afin de réduire l'erreur entre la puissance agrégée du MPC et du PDE, on tente de faire varier le coefficient de diffusion  $\beta$ . On fait varier ce coefficient de diffusion entre 0 et 0.2 avec un pas de 0.01. L'erreur moyenne sur les profils ON et OFF est visible Fig. 5.16. On remarque que l'erreur est minimale pour  $\beta = 0$ , ce qui est cohérent avec la théorie puisque nous observons une population homogène. Pour le cas hétérogène on observe les profils ON et OFF des contrôleurs Fig. 5.18 et Fig. 5.19 respectivement. La comparaison entre la puissance agrégée du contrôleur MPC et PDE est montrée Fig. 5.21. Enfin en faisant varier le coefficient de diffusion  $\beta$  entre 0 et 0.2 on observe Fig. 5.20 une erreur minimale entre la solution MPC et PDE pour  $\beta = 0.07$ . Cette valeur est cohérente avec l'article de Moura ([1]) où la valeur trouvée pour le coefficient de diffusion était  $\beta = 0.1$ . Cette légère différence peut s'expliquer par le fait du cumul des erreurs numériques dû aux approximations du modèle thermique en un modèle discret et la discrétisation de l'équation différentielle permettant d'obtenir la solution PDE. Pour le cas d'une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de contrôle on obtient les profils suivants Fig. 5.22 et Fig. 5.23 pour les contrôleurs ON et OFF respectivement. La puissance agrégée des contrôleurs MPC et PDE est montrée Fig. 5.25. De la même manière que pour une population hétérogène, on obtient une erreur minimale entre le MPC et le PDE pour  $\beta = 0.07$ . Ceci est cohérent puisque même si on a ajouté une pénalisation aléatoire dans l'effort de contrôle, cette hétérogénéité supplémentaire est absorbée par la fonction  $\delta$ . Il ne s'agit pas d'une hétérogénéité dans le modèle. Ceci permet donc de valider nos résultats.

Pour déterminer le coefficient de diffusion de notre système on utilise un estimateur en premier lieu, qui nous donne une valeur estimée du coefficient  $\beta$ , puis expérimentalement cette valeur de  $\beta$  est affinée. L'estimateur utilisé est décrit dans la sous-section suivante.

### 5.3.2 Estimateur du coefficient de diffusion

Soit l'équation (5.24a), que l'on développe :

$$\frac{\partial w_{ON}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial \alpha_{ON}(x)}{\partial x} w_{ON}(x, t) - \alpha_{ON}(x) \frac{\partial w_{ON}(x, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 w_{ON}(x, t)}{\partial x^2} + \delta(x, t). \quad (5.28)$$

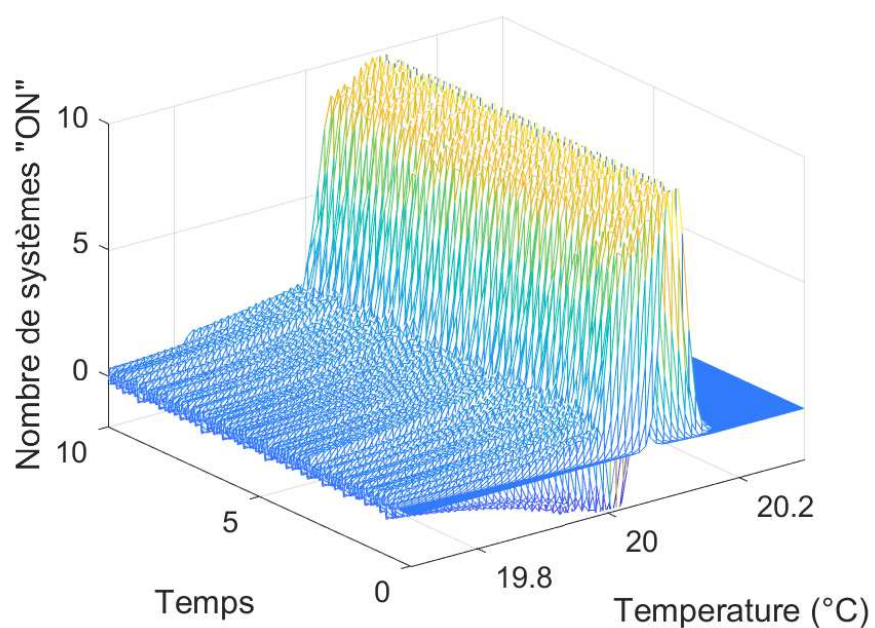


Figure 5.14 Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état ON pour une population homogène.

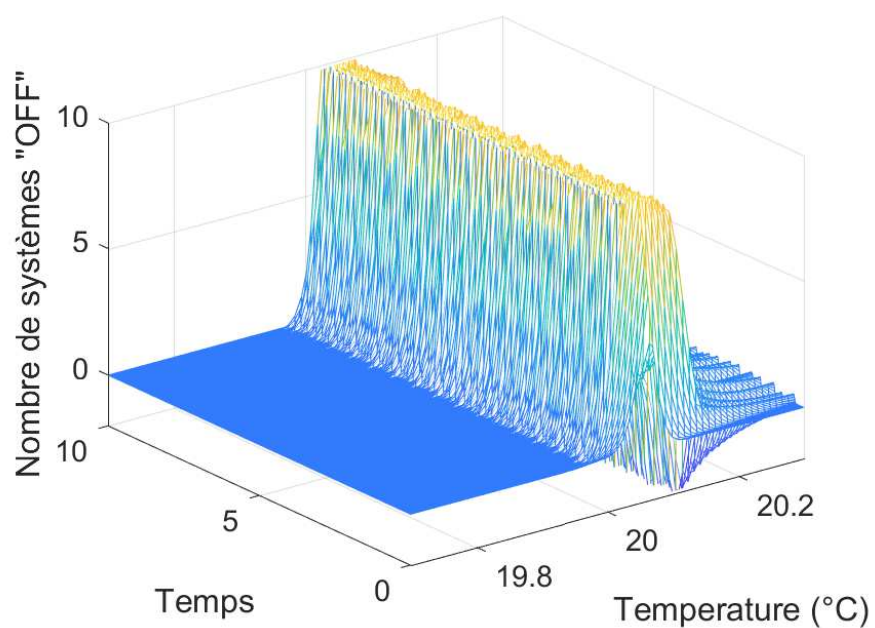


Figure 5.15 Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état OFF pour une population homogène.

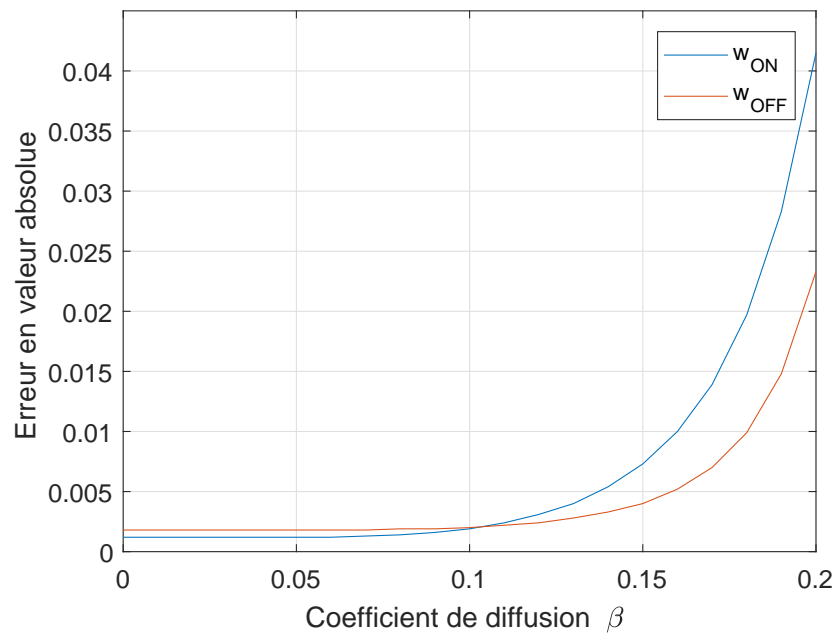


Figure 5.16 Erreur moyenne entre le modèle PDE et MPC en fonction du coefficient de diffusion pour une population homogène.

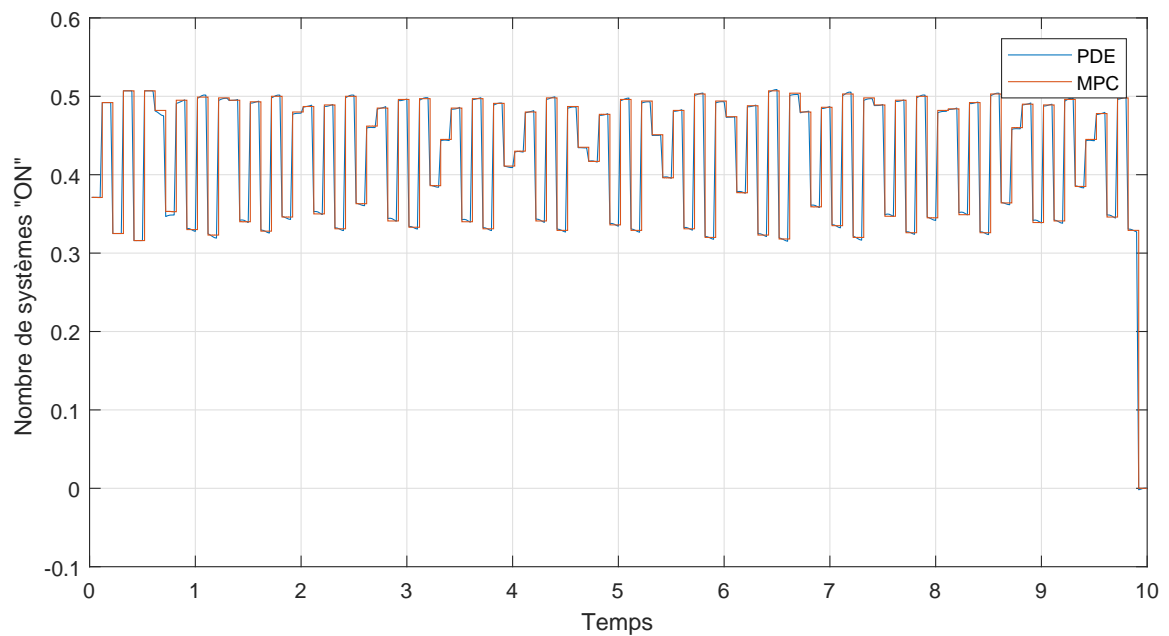


Figure 5.17 Puissance agrégée par les modèles MPC et PDE de l'ensemble de la population homogène.



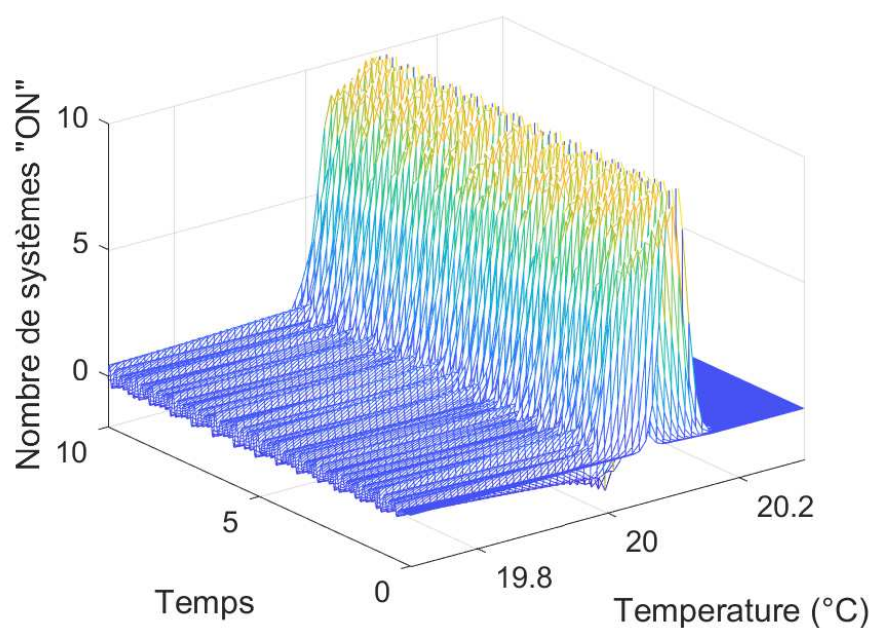


Figure 5.18 Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état ON pour une population hétérogène.

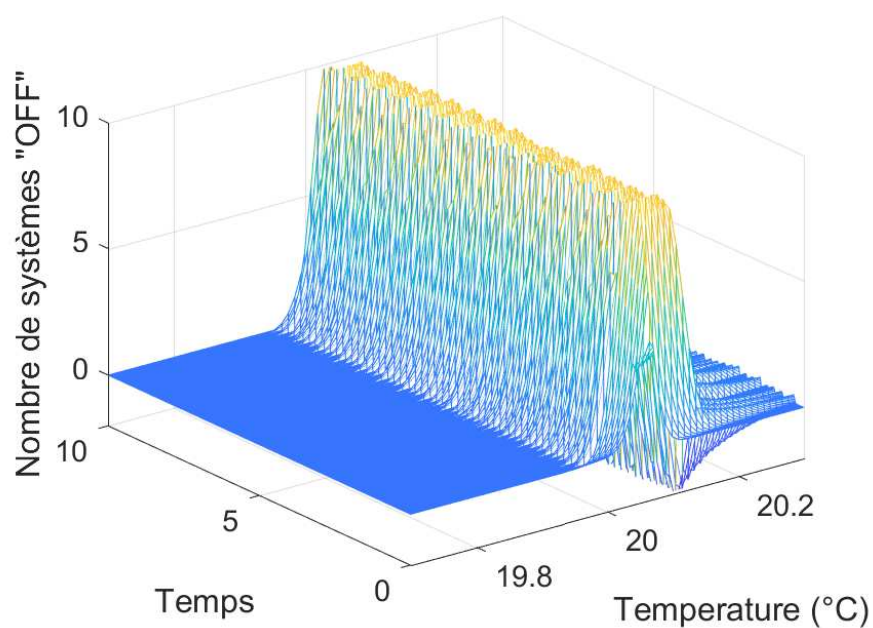


Figure 5.19 Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état OFF pour une population hétérogène.

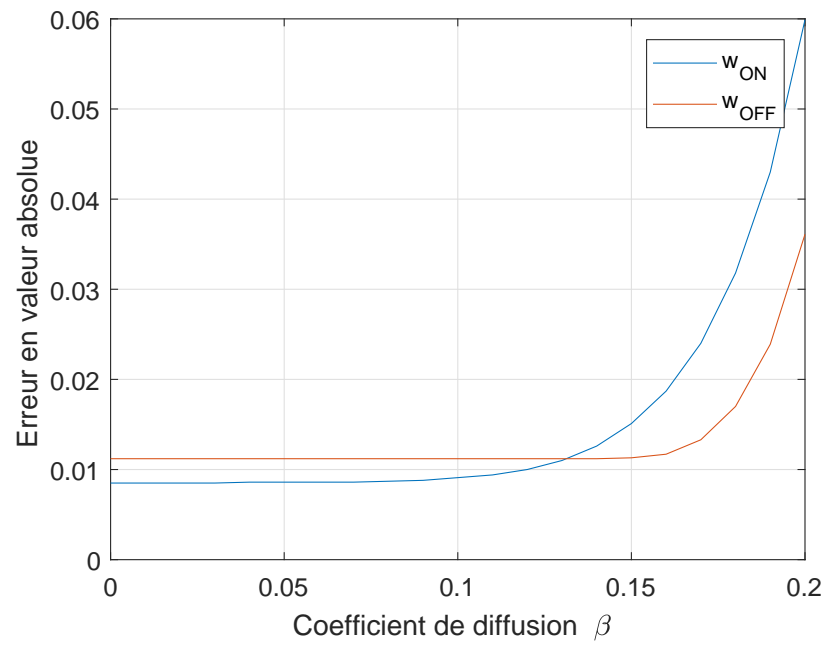


Figure 5.20 Erreur moyenne entre le modèle PDE et MPC en fonction du coefficient de diffusion pour une population hétérogène.

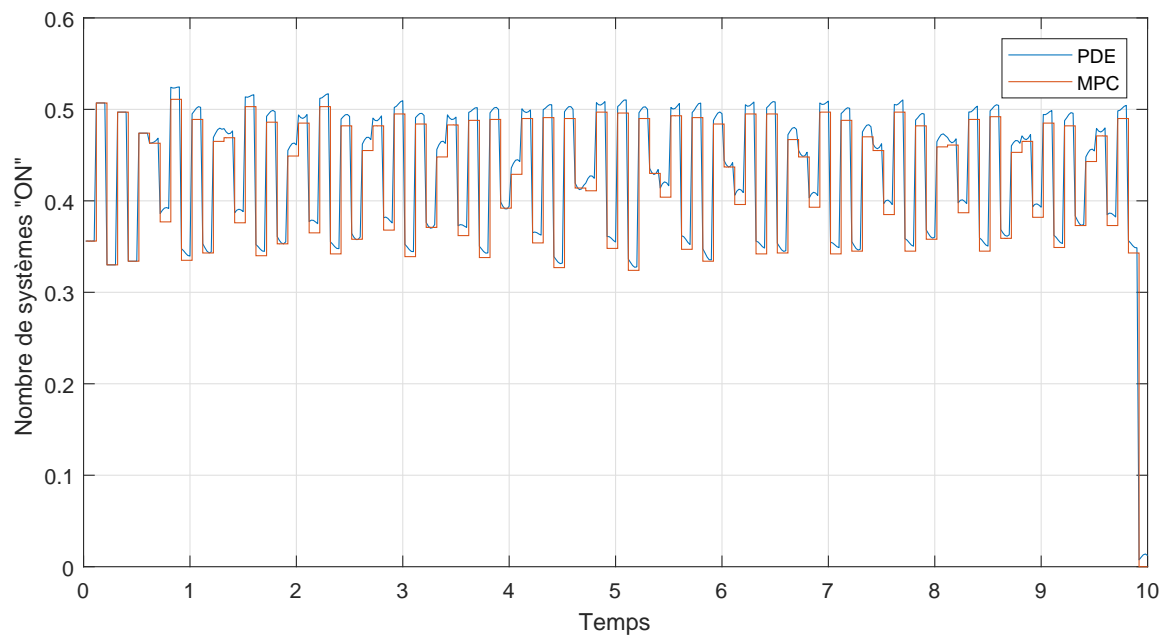


Figure 5.21 Puissance agrégée par les modèles MPC et PDE de l'ensemble de la population hétérogène.

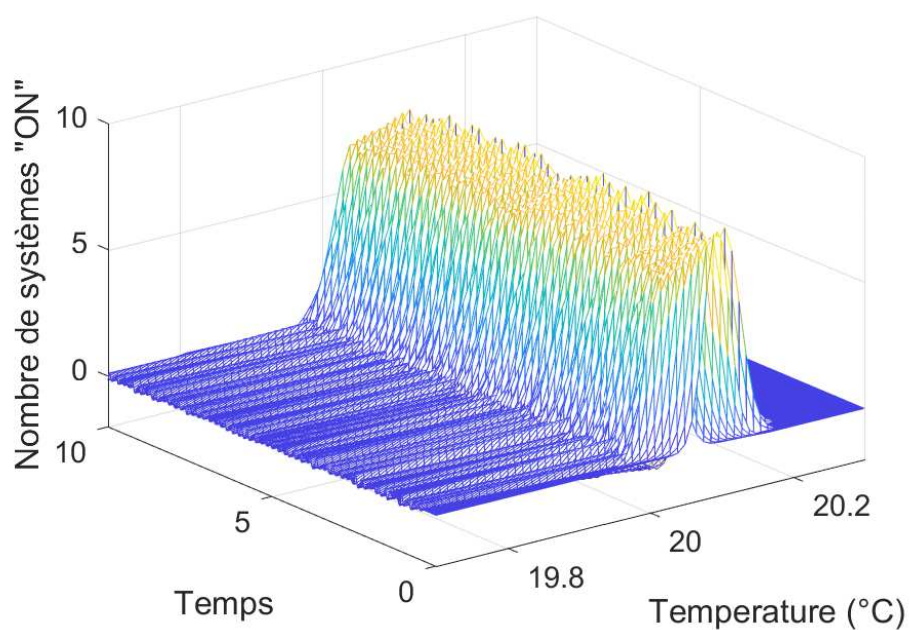


Figure 5.22 Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état ON pour une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande.

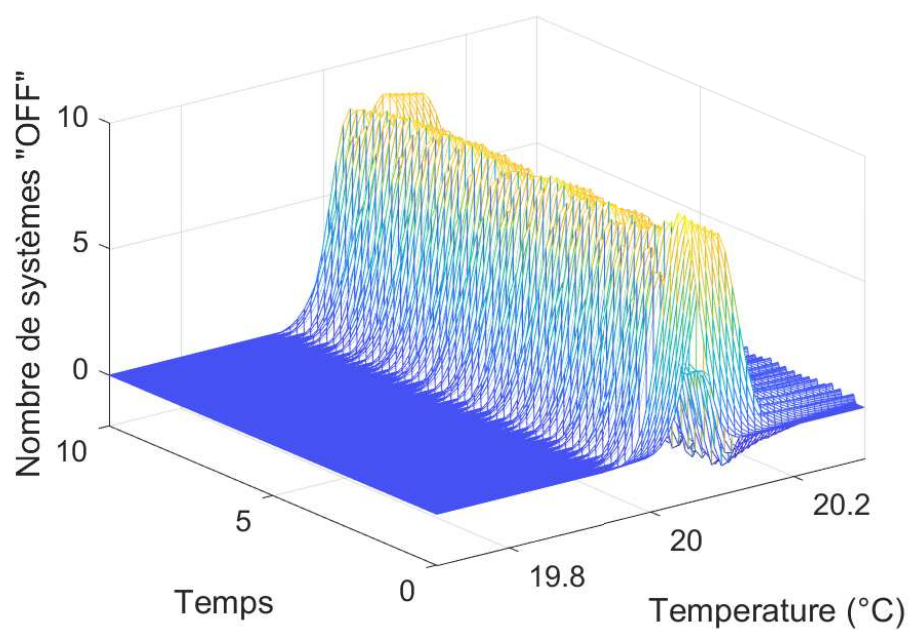


Figure 5.23 Surface solution représentant le nombre de contrôleurs dans l'état OFF pour une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande.

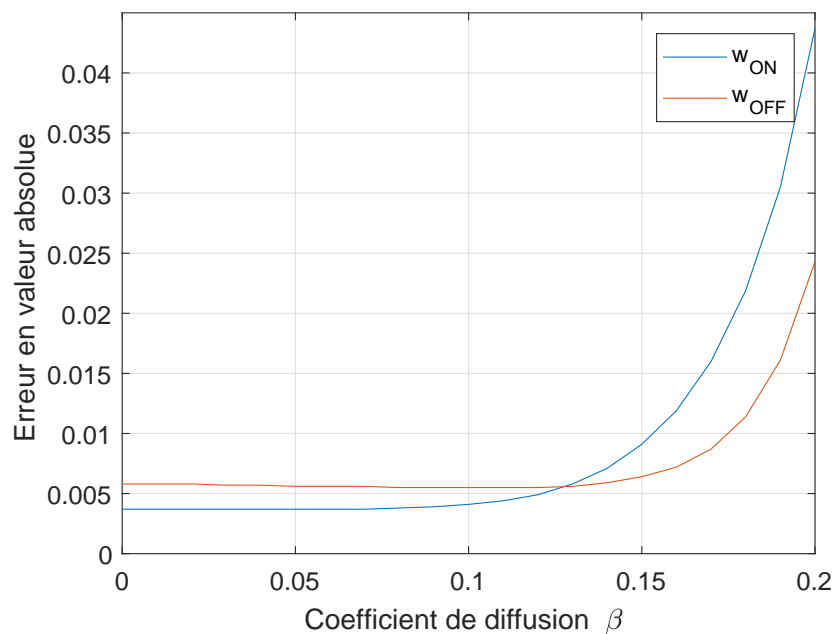


Figure 5.24 Erreur moyenne entre le modèle PDE et MPC en fonction du coefficient de diffusion pour une population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande.

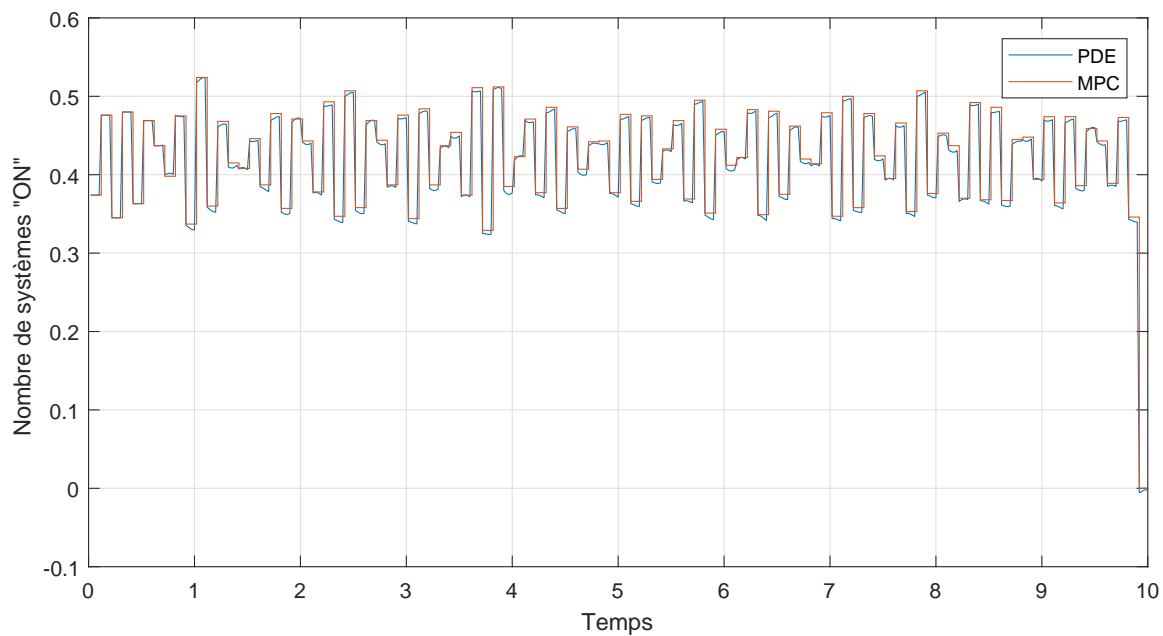


Figure 5.25 Puissance agrégée par les modèles MPC et PDE de l'ensemble de la population hétérogène avec pénalisation aléatoire de l'effort de commande.

Afin d'alléger la notation, utilisons la notation suivante :

$$\begin{aligned} w_{ON\{t\}}(x, t) &= \frac{\partial w_{ON}}{\partial t}(x, t), \\ w_{ON\{x\}}(x, t) &= \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x, t), \\ w_{ON\{xx\}}(x, t) &= \frac{\partial^2 w_{ON}}{\partial x^2}(x, t). \end{aligned}$$

De plus, on écrit :

$$\alpha_{ON}(x) = \alpha \times \lambda_{ON}(x), \quad (5.29)$$

avec  $\alpha = a$  et  $\lambda_{ON}(x) = T^a - x + \frac{Ed + B}{a}$ . Donc on réécrit (5.28) de la façon suivante :

$$w_{ON\{t\}}(x, t) = \alpha w_{ON}(x, t) - \alpha \lambda(x) w_{ON\{x\}}(x, t) + \beta w_{ON\{xx\}}(x, t) + \delta(x, t). \quad (5.30)$$

La puissance normalisée  $P_{PDE}(t)$  consommée par le système agrégé est donnée (5.23). En s'intéressant aux variations de puissance dans le temps et en réalisant une intégration par partie on obtient la formule développée suivante :

$$\begin{aligned} \dot{P}_{PDE}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{min}}^{x_{max}} w_{ON}(x, t) dx \\ &= \int_{x_{min}}^{x_{max}} [\alpha w_{ON}(x, t) - \alpha \lambda_{ON}(x) w_{ON\{x\}}(x, t) + \beta w_{ON\{xx\}}(x, t) + \delta(x, t)] dx \\ &= \alpha \left[ [\lambda(x, t) w_{ON}(x, t)]_{T_{min}}^{T_{max}} + \int_{x_{min}}^{x_{max}} (\lambda_{ON\{x\}}(x) + 1) w_{ON}(x, t) dx \right] \\ &\quad + [\beta w_{ON\{xx\}}(x, t) + \Delta(x, t)]_{T_{min}}^{T_{max}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Avec  $\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \delta$ , et  $\lambda_{ON}(x) = T^a - x + \frac{Ed + B}{a}$  on a donc  $\lambda_{ON\{x\}}(x) = -1$  d'où :

$$\lambda_{ON\{x\}}(x) + 1 = 0, \forall x. \quad (5.32)$$

En utilisant (5.32) dans (5.31) et en réorganisant les termes on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{P}_{PDE}(t) &= -\alpha(x_{max} w_{ON}(x_{max}, t) - x_{min} w_{ON}(x_{min}, t)) \\ &\quad + \alpha b(w_{ON}(x_{max}, t) - w_{ON}(x_{min}, t)) \\ &\quad + \beta(w_{ON\{xx\}}(x_{max}, t) - w_{ON\{xx\}}(x_{min}, t)) \\ &\quad + \Delta(x_{max}, t) - \Delta(x_{min}, t) \\ &= \alpha \Phi_1(t) + \alpha b \Phi_2(t) + \beta \Phi_3(t) + \Phi_4(t), \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec  $b = T^a + \frac{Ed + B}{a}$  et :

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= -x_{max}w_{ON}(x_{max}, t) + x_{min}w_{ON}(x_{min}, t), \\ \Phi_2(t) &= w_{ON}(x_{max}, t) - w_{ON}(x_{min}, t), \\ \Phi_3(t) &= w_{ON\{x\}}(x_{max}, t) - w_{ON\{x\}}(x_{min}, t), \\ \Phi_4(t) &= \Delta(x_{max}, t) - \Delta(x_{min}, t).\end{aligned}$$

On a ainsi un système paramétré linéaire par rapport aux inconnues  $\alpha$ ,  $\alpha b$ , et  $\beta$ . Pour utiliser ce modèle nous devons mesurer les termes  $w_{ON}(x_{min}, t)$ ,  $w_{ON}(x_{max}, t)$ ,  $w_{ON\{x\}}(x_{min}, t)$ ,  $w_{ON\{x\}}(x_{max}, t)$ ,  $\Delta(x_{min}, t)$  et  $\Delta(x_{max}, t)$ .  $w_{ON}(x_{min}, t)$  et  $w_{ON}(x_{max}, t)$ . Ils sont calculables à partir des informations que nous fournit le contrôleur MPC. En effet, il adapte sa commande en fonction de la température du composant, il est donc en mesure de fournir les informations nécessaires au calcul de  $w_{ON}(x_{min}, t)$  et  $w_{ON}(x_{max}, t)$ . Pour  $w_{ON\{x\}}(x_{min}, t)$  et  $w_{ON\{x\}}(x_{max}, t)$  on utilise une méthode de différences finies à partir de  $w_{ON}(x, t)$  par rapport à  $x$ . Enfin pour déterminer  $\Delta(x_{min}, t)$  et  $\Delta(x_{max}, t)$  on calcul d'abord la fonction  $\delta(x, t)$  avec les informations que fournit le contrôleur MPC, puis une fois tracée on intègre cette fonction afin d'obtenir le résultat souhaité. Comme l'équation (5.33) contient des dérivées et des intégrales directes, nous allons filtrer les signaux afin de lisser le signal et obtenir une meilleure réponse avec notre estimateur. Avec une constante  $c > 0$  choisie par l'opérateur, les signaux sont filtrés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= -c\chi_1 + P_{PDE}(t), \\ \dot{\chi}_2 &= -c\chi_2 + \Phi_1(t), \\ \dot{\chi}_3 &= -c\chi_3 + \Phi_2(t), \\ \dot{\chi}_4 &= -c\chi_4 + \Phi_3(t), \\ \dot{\chi}_5 &= -c\chi_5 + \Phi_4(t).\end{aligned}\tag{5.34}$$

Le choix de  $c$  doit permettre au signal filtré d'être suffisamment proche du signal d'entrée, tout en atténuant au mieux les bruits de mesure. Ainsi l'équation (5.33), une fois filtrée devient :

$$-c\chi_1(t) + P_{PDE}(t) = \alpha\chi_2(t) + \alpha b\chi_3(t) + \beta\chi_4(t) + \chi_5(t).\tag{5.35}$$

On définit le vecteur estimé des paramètres par  $\hat{\theta} = [\hat{\alpha} \ \hat{\alpha b} \ \hat{\beta} \ 1]^T$  et le vecteur d'état est défini par  $\phi = [\chi_2 \ \chi_3 \ \chi_4 \ \chi_5]^T$ . L'équation (5.35) devient :

$$-c\chi_1(t) + P_{PDE}(t) = \hat{\theta}^T \phi(t).\tag{5.36}$$

Un estimateur des moindres carrés est utilisé, il s'écrit de la forme suivante :

$$\epsilon(t) = -c\chi_1(t) + P_{PDE}(t) - \widehat{\theta}^T \phi(t), \quad (5.37a)$$

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{1 + \gamma \phi^T \phi} \Gamma \phi \epsilon, \quad (5.37b)$$

$$\dot{\Gamma} = -\frac{1}{1 + \gamma \phi^T \phi} \Gamma \phi \phi^T \Gamma, \quad (5.37c)$$

avec  $\Gamma(0) = \Gamma_0 = \Gamma_0^T > 0$  et  $\gamma > 0$ . La fonction  $\epsilon$  représente l'erreur entre le système mesuré et le système théorique. Les paramètres  $\widehat{\theta}$  optimaux sont ceux qui minimisent l'erreur  $\epsilon$ . Les valeurs de  $\Gamma_0$  et  $\gamma$  sont ajustables afin de faire converger la solution.

#### 5.4 Contrôleur supérieur pour équation aux dérivées partielles

L'objectif final de cette maîtrise est de proposer un contrôleur PDE permettant de suivre une référence de consommation de puissance en faisant varier la température de référence du système MPC. Ainsi ce contrôleur permet de justifier la mise en parallèle faite entre les simulations de Monte-Carlo faites par MPC et le modèle PDE. Dans le cas présent, nous nous attachons donc à modifier la température de référence au cours de la simulation. Pour cela, nous devons utiliser le modèle suivant ([58, 59, 75]) :

$$\frac{\partial w_{ON}}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x, t) - \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t) - u(t) w_{ON}(x, t) \right) + \delta(x, t), \quad (5.38a)$$

$$\frac{\partial w_{OFF}}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{\partial w_{OFF}}{\partial x}(x, t) - \alpha_{OFF}(x) w_{OFF}(x, t) - u(t) w_{OFF}(x, t) \right) - \delta(x, t), \quad (5.38b)$$

avec  $u(t) = \dot{x}_{ref}$ .  $x_{ref}$  est la température de référence des thermostats. Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x_{min}, t) - \alpha_{ON}(x_{min}) w_{ON}(x_{min}, t) - u(t) w_{ON}(x_{min}, t) = 0, \quad (5.39a)$$

$$\beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x_{max}, t) - \alpha_{ON}(x_{max}) w_{ON}(x_{max}, t) - u(t) w_{ON}(x_{max}, t) = 0, \quad (5.39b)$$

$$\beta \frac{\partial w_{OFF}}{\partial x}(x_{min}, t) - \alpha_{OFF}(x_{min}) w_{OFF}(x_{min}, t) - u(t) w_{OFF}(x_{min}, t) = 0, \quad (5.39c)$$

$$\beta \frac{\partial w_{OFF}}{\partial x}(x_{max}, t) - \alpha_{OFF}(x_{max}) w_{OFF}(x_{max}, t) - u(t) w_{OFF}(x_{max}, t) = 0, \quad (5.39d)$$

$$w_{ON}(x, 0) = w_{ON}^0, \quad w_{OFF}(x, 0) = w_{OFF}^0. \quad (5.39e)$$

Pour contrôler la puissance totale consommée par la population de TCLs, nous définissons la consommation pondérée de puissance comme étant la sortie du système :

$$y(t) = \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) w_{ON}(x, t) dx, \quad (5.40)$$

avec  $a$  et  $b$  des constantes et  $a \neq 0$ .

L'objectif du contrôleur est ici de suivre une puissance de fonctionnement  $y_d$ . Cette puissance de fonctionnement est imposée par les fournisseurs d'énergie en fonction de l'état du réseau électrique. L'erreur de suivi est  $e(t) = y(t) - y_d$  et son comportement dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) \frac{\partial w_{ON}}{\partial t} dx \\ &= \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x, t) - \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t) \right) dx \\ &\quad - \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) u(t) \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x, t) dx + \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) \delta(x, t) dx. \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties et en appliquant les conditions aux limites il vient :

$$\frac{de}{dt} = \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} a \left( \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t) - \beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x, t) + u(t) w_{ON}(x, t) \right) dx + \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) \delta(x, t) dx.$$

On choisit

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left( \beta \frac{\partial w_{ON}}{\partial x}(x, t) - \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t) \right) dx + \frac{\eta}{P} \phi(t)}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} a w_{ON}(x, t) dx} \\ &= \frac{\beta(w_{ON}(x_{max}, t) - w_{ON}(x_{min}, t)) - \int_{x_{min}}^{x_{max}} \alpha_{ON}(x) w_{ON}(x, t) dx + \frac{\eta}{P} \phi(t)}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} a w_{ON}(x, t) dx}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

et

$$\Gamma(t) = \frac{P}{\eta} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (ax + b) \delta(x, t) dx. \quad (5.42)$$

L'erreur dynamique de suivi est donc :

$$\frac{de}{dt} = \phi(t) + \Gamma(t), \quad e(0) = e_0, \quad (5.43)$$

où  $\phi(t)$  est un contrôle auxiliaire et  $e_0$  est l'erreur initiale de régulation. Afin de faire stabiliser le système et afin de faire converger l'erreur de suivi vers 0 on choisit la commande suivante :

$$\phi(t) = -k_0 e(t) \quad (5.44)$$



avec  $k_0 > 0$ . L'analyse de la stabilité du contrôle est disponible en annexe.

Pour résumer, les valeurs des paramètres du modèle thermique et les paramètres des différents contrôleurs sont représentés dans la Table. 5.3.

Tableau 5.3 Paramètres du système

Paramètres	Description [Unité]	Valeur
$R$	Résistance thermique [ $^{\circ}\text{C}/\text{kW}$ ]	2
$C$	Capacité thermique [ $\text{kWh}/^{\circ}\text{C}$ ]	$N(10, 3)$
$P$	Puissance thermique [ $\text{kW}$ ]	14
$x_{ie}$	Température ambiante [ $^{\circ}\text{C}$ ]	32
$\eta$	Coefficient de performance	2.5
$Q_{mpc}$	Coefficient de pondération sur l'erreur de suivi $e_{mpc}$	100
$R_{mpc}$	Coefficient de pondération sur l'effort de commande $u_{mpc}$	$N(10, 2)$
$P_{mpc}$	Horizon de prédiction	5
$\Delta T$	Largeur de la bande de température accessible [ $^{\circ}\text{C}$ ]	1
$a$	Coefficient de la fonction de pondération	-1
$b$	Coefficient de la fonction de pondération	21
$k_0$	Gain	5600

La simulation modélise 1000 systèmes thermostatiques indépendants contrôlés individuellement par les contrôleurs à commande prédictive. Le contrôleur par équations de Fokker-Planck est utilisé au niveau supérieur afin de contrôler la population entière. L'enjeu est de pouvoir contrôler la température des individus à partir d'une consigne de puissance donnée par des éléments extérieurs. Cette variation de puissance a un impact sur la température de référence du contrôleur MPC. Étant donné une certaine variation de puissance dans la puissance de référence au temps  $t = 15$ , la température des systèmes passe de  $20.5^{\circ}\text{C}$  à  $19^{\circ}\text{C}$ . Comme nous pouvons le voir Fig. 5.26, la puissance de référence subit un échelon au temps  $t = 15$ , passant de 0.41 à 0.47. Ici, le temps de réponse est d'environ 7 unités de temps et le contrôleur fonctionne bien puisqu'il suit la trajectoire demandée. Il y a peu d'oscillations et de synchronisation dans le système grâce, au coefficient de pondération  $R_{mpc}$  qui est choisi dans une distribution normale afin d'hétérogénéiser encore plus la population, et au délai introduit dans la commande afin de désynchroniser la population. Les variations de température de référence dues au contrôleur de Fokker-Planck sont calculées à chaque itération du contrôleur MPC. Ces variations sont visibles Fig. 5.27, car  $u(t) = \dot{x}_{ref}$ . Afin de stabiliser le système, les variations de température sont intégrées sur 10 itérations puis sont appliquées au système, c'est ainsi que vient Fig. 5.29. L'erreur  $e(t) = y(t) - y_d$  est représentée Fig. 5.28. La température de référence Fig. 5.29 est obtenue à chaque itération à partir de Fig. 5.27 et en intégrant le signal sur les 10 dernières itérations afin d'éviter les variations brutales de

températures. Ainsi la température de référence pour les 1000 systèmes thermostatiques est présenté Fig. 5.29. Cette température de référence sert d'entrée pour les contrôleurs MPC qui vont suivre cette trajectoire. La température d'un seul TCL est visible Fig. 5.30. Bien que le changement de consigne de puissance se produise au temps  $t = 15$ , le changement sur la température du système est retardé à cause du délai dans le calcul de la consigne pour le MPC et à cause du délai dans l'application de la consigne qui ont pour objectif de désynchroniser le système. Finalement sur la Fig. 5.31 est présentée la température de 100 TCLs indépendants. Sur cette figure on peut voir l'impact du délai sur l'application de la consigne. Particulièrement au moment du changement de consigne de puissance où l'on voit le délai pour chaque TCL.

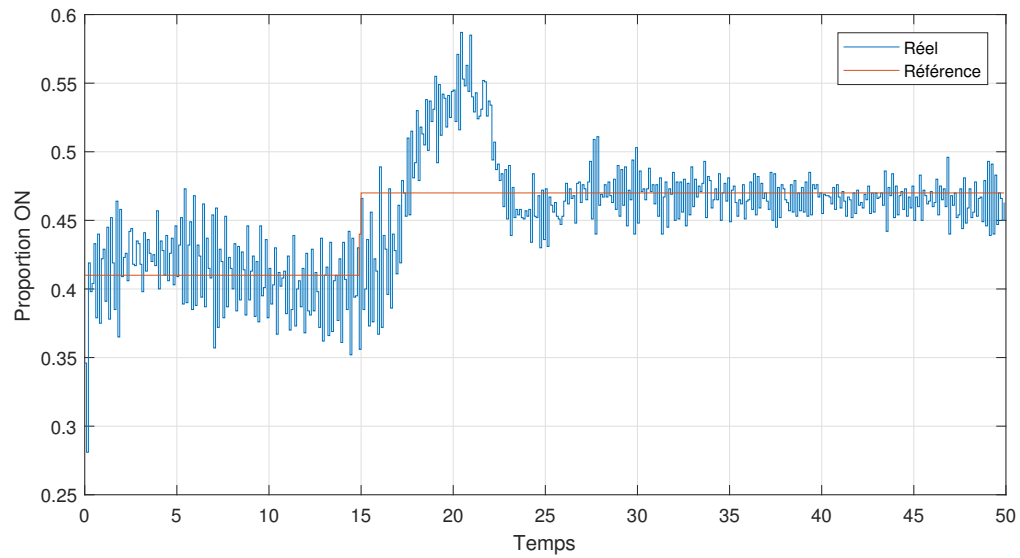


Figure 5.26 Puissance consommée et puissance de référence normalisée pour les 1000 TCLs

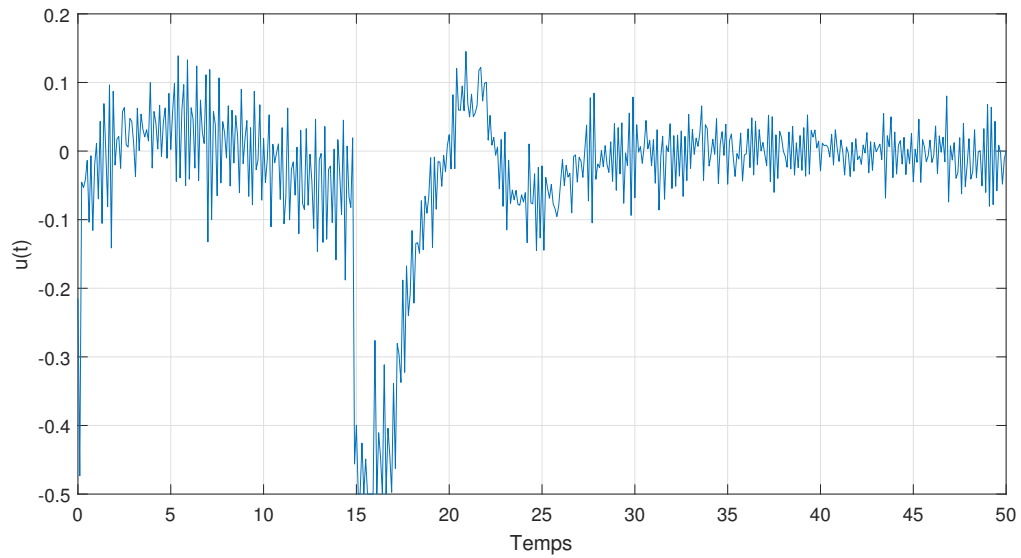


Figure 5.27 Changements de commande dus au contrôleur de Fokker-Planck

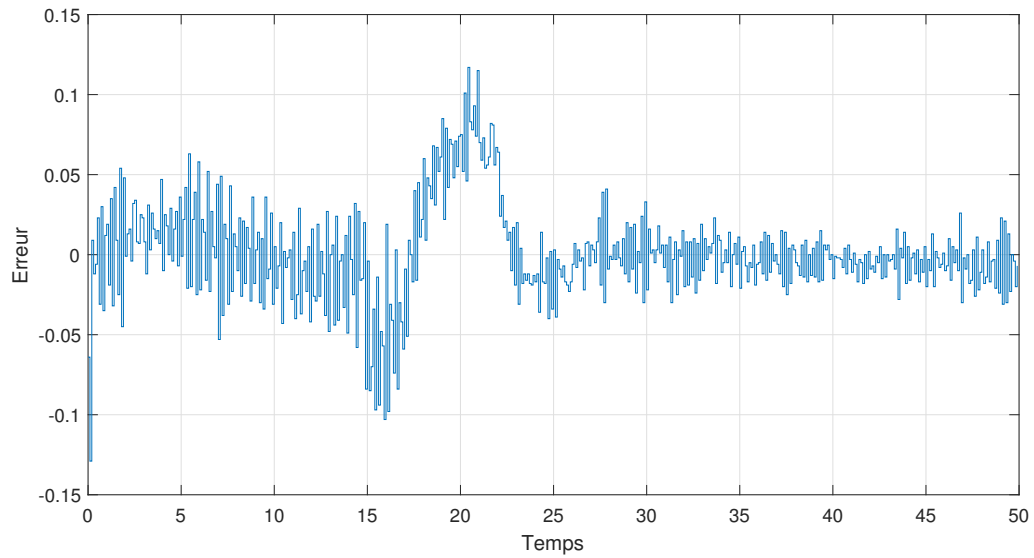


Figure 5.28 Erreurs dues au contrôleur de Fokker-Planck

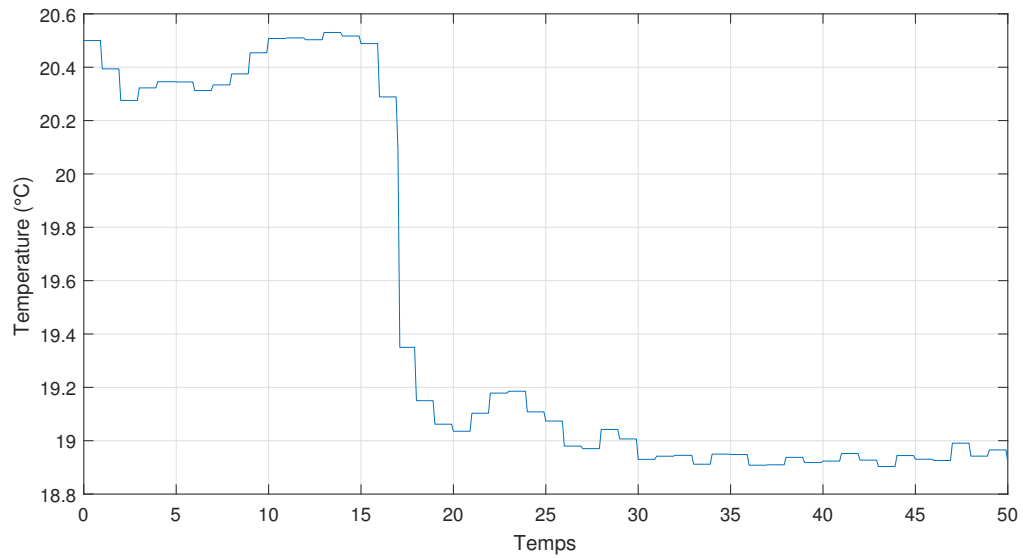


Figure 5.29 Température de référence pour les contrôleurs MPC

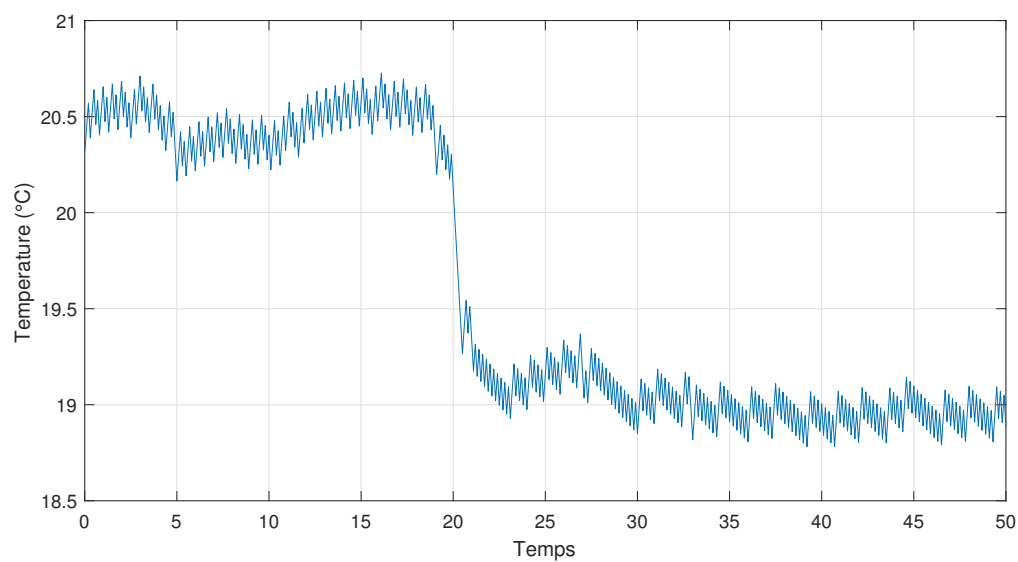


Figure 5.30 Température d'un TCL

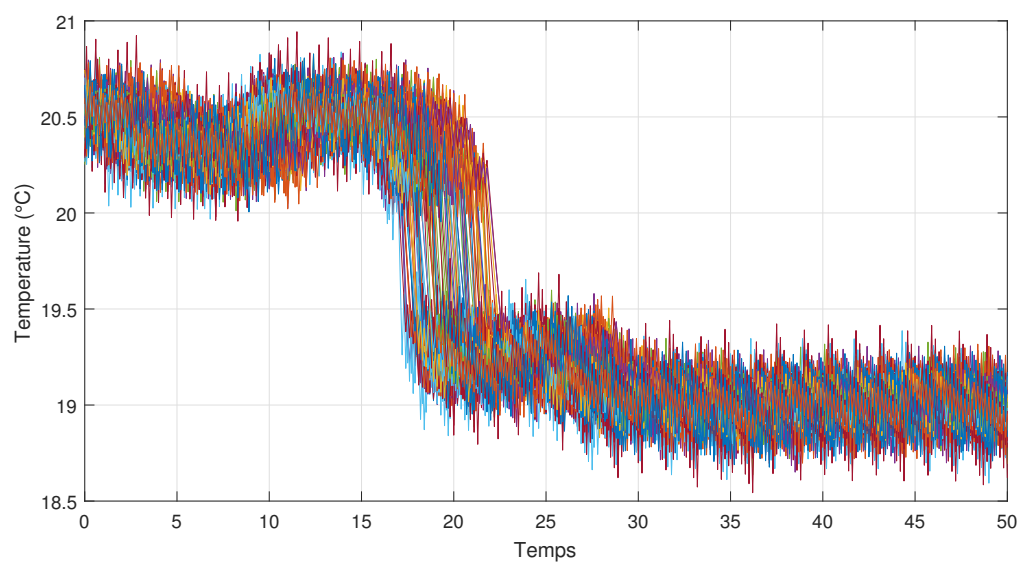


Figure 5.31 Température de 100 TCLs

## CHAPITRE 6 CONCLUSION

Nous avons développé un modèle thermique adapté aux centres de données pour contrôler la température des composants électroniques d'un serveur informatique. Ce modèle thermique est adapté au contrôle des ventilateurs des serveurs informatiques afin de faire varier leur état en fonction de l'état du composant électronique contrôlé. Il serait intéressant de confronter ce modèle avec une simulation de dynamique des fluides.

Nous avons comme objectif de donner deux méthodes décentralisées permettant de contrôler une grande population homogène de systèmes thermostatiques contrôlés par MPC tout en réduisant les oscillations de puissance et les pics de consommation de puissance. Cet objectif a été rempli par une première méthode qui ajoute un délai aléatoire dans l'application d'un changement de consigne dans l'état de référence et une seconde méthode ajoutant une pénalisation supplémentaire aléatoire sur l'effort de commande dans la fonction objectif. Ces deux méthodes utilisées individuellement ont donné de bons résultats et ceux-ci sont encore meilleurs lorsque les méthodes sont combinées. Ces méthodes ont été testées avec des densités de probabilités uniformes. Afin d'obtenir des résultats optimaux, il serait intéressant dans la suite du projet de pouvoir caractériser l'influence des densités de probabilité sur les oscillations de puissance et sur le pic de consommation. Des lois de probabilités s'appliquant sur un domaine borné sont recommandées afin de borner le décalage de consigne dans le temps. En ce sens, les lois de probabilités bêta semblent intéressantes. Par exemple si l'on veut avoir le temps de réponse le plus faible possible il me semble qu'il est important d'avoir une majeure partie de la population avec un délai dans l'application de la commande assez court, et une minorité de la population avec un délai plus long. En revanche, diminuer le temps de réponse entraîne une désynchronisation moins importante comme nous avons pu l'observer dans ce mémoire. Pour la méthode de pénalisation supplémentaire aléatoire de l'effort de commande, le choix de distribution de probabilités semble plus large. Nous avons fait nos tests avec une loi de densité de probabilité uniforme, cependant il apparaissait que les petites variations de pénalisation n'avaient que peu d'influence sur la solution finale. Il semblerait qu'une distribution de probabilité favorisant de plus grandes différences dans le poids de l'effort de commande aurait plus d'impact sur la désynchronisation des systèmes. De plus parmi les améliorations futures il est important de tester la phase d'implémentation sur un système réel afin de vérifier le bon comportement du contrôleur et de tester les méthodes développées en conditions réelles.

Après avoir développé deux méthodes de désynchronisation décentralisées nous avons mis en lumière le lien entre une simulation de Monte-Carlo avec contrôleurs MPC et un modèle

PDE permettant de représenter le comportement dynamique d'une population entière grâce à un système d'équations. Nous avons utilisé une équation de transport dans le cas d'une population homogène et une équation de Fokker-Planck dans la cadre d'une population hétérogène. Dans les deux cas, nous avons obtenu de très bons résultats nous permettant de valider les hypothèses émises. Les erreurs que nous avons observées pouvant être associées aux approximations que nous avons faites dans les différents modèles utilisés. Des modèles d'approximation d'ordre supérieur donneront probablement des résultats plus précis. Dans le cadre de ce mémoire, le modèle PDE a été mis en parallèle avec les contrôleurs MPC afin de représenter la population globale. Par la suite, ce modèle a permis de créer un contrôleur de niveau supérieur qui gère la consommation de puissance du système en influençant sur la température de référence des systèmes individuels. Les simulations permettent de valider le fonctionnement d'un tel contrôleur. Des améliorations sont possibles dans l'implémentation du contrôleur afin de réduire le temps de réponse et de réduire les oscillations du système. Notamment en jouant de nouveau sur les distributions de probabilités. Utiliser un filtre passe-bas pour lisser le signal de commande du contrôleur PDE serait intéressant. Implémenter cette approche sur un système réel est la prochaine étape de ce projet.

## RÉFÉRENCES

- [1] S. Moura, J. Bendtsen et V. Ruiz, “Parameter identification of aggregated thermostatically controlled loads for smart grids using pde techniques,” *International Journal of Control*, vol. 87, n<sup>o</sup>. 7, p. 1373–1386, 2014.
- [2] J. C. Maxwell *et al.*, “I. on governors,” *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 16, p. 270–283, 1868.
- [3] J. Richalet, A. Rault, J. Testud et J. Papon, “Model predictive heuristic control,” *Automatica (Journal of IFAC)*, vol. 14, n<sup>o</sup>. 5, p. 413–428, 1978.
- [4] D. W. Clarke, C. Mohtadi et P. Tuffs, “Generalized predictive control—part i. the basic algorithm,” *Automatica*, vol. 23, n<sup>o</sup>. 2, p. 137–148, 1987.
- [5] X. Fang, S. Misra, G. Xue et D. Yang, “Smart grid—the new and improved power grid : A survey,” *IEEE communications surveys & tutorials*, vol. 14, n<sup>o</sup>. 4, p. 944–980, 2012.
- [6] J. Yao, G. T. Costanzo, G. Zhu et B. Wen, “Power admission control with predictive thermal management in smart buildings,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, n<sup>o</sup>. 4, p. 2642–2650, 2015.
- [7] T. X. Nghiem, M. Behl, R. Mangharam et G. J. Pappas, “Green scheduling of control systems for peak demand reduction,” dans *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*. IEEE, 2011, p. 5131–5136.
- [8] J. Ma, H. H. Chen, L. Song et Y. Li, “Residential load scheduling in smart grid : A cost efficiency perspective,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 7, n<sup>o</sup>. 2, p. 771–784, 2016.
- [9] K. X. Perez, M. Baldea et T. F. Edgar, “Integrated hvac management and optimal scheduling of smart appliances for community peak load reduction,” *Energy and Buildings*, vol. 123, p. 34–40, 2016.
- [10] M. Brandstetter, A. Schirrer, M. Miletić, S. Henein, M. Kozek et F. Kupzog, “Hierarchical predictive load control in smart grids,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 8, n<sup>o</sup>. 1, p. 190–199, 2017.
- [11] W. Gu, Z. Wang, Z. Wu, Z. Luo, Y. Tang et J. Wang, “An online optimal dispatch schedule for cchp microgrids based on model predictive control,” *IEEE transactions on smart grid*, vol. 8, n<sup>o</sup>. 5, p. 2332–2342, 2017.
- [12] L. D. Collins et R. H. Middleton, “Distributed demand peak reduction with non-cooperative players and minimal communication,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2017.



- [13] W. H. Sadid, S. A. Abobakr et G. Zhu, “Discrete-event systems-based power admission control of thermal appliances in smart buildings,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 8, n<sup>o</sup>. 6, p. 2665–2674, 2017.
- [14] C. Fiandrino, D. Kliazovich, P. Bouvry et A. Y. Zomaya, “Performance and energy efficiency metrics for communication systems of cloud computing data centers,” *IEEE Transactions on Cloud Computing*, vol. 5, n<sup>o</sup>. 4, p. 738–750, 2017.
- [15] X. Zhang, T. Lindberg, N. Xiong, V. Vyatkin, A. Mousavi *et al.*, “Cooling energy consumption investigation of data center it room with vertical placed server,” dans *Energy Procedia*, vol. 105. Elsevier, 2017, p. 2047–2052.
- [16] M. Tatchell-Evans, N. Kapur, J. Summers, H. Thompson et D. Oldham, “An experimental and theoretical investigation of the extent of bypass air within data centres employing aisle containment, and its impact on power consumption,” *Applied Energy*, vol. 186, p. 457–469, 2017.
- [17] W. Van Heddeghem, S. Lambert, B. Lannoo, D. Colle, M. Pickavet et P. Demeester, “Trends in worldwide ict electricity consumption from 2007 to 2012,” *Computer Communications*, vol. 50, p. 64–76, 2014.
- [18] H. Rong, H. Zhang, S. Xiao, C. Li et C. Hu, “Optimizing energy consumption for data centers,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 58, p. 674–691, 2016.
- [19] J. Ni et X. Bai, “A review of air conditioning energy performance in data centers,” *Renewable and sustainable energy reviews*, vol. 67, p. 625–640, 2017.
- [20] A. Greenberg, J. Hamilton, D. A. Maltz et P. Patel, “The cost of a cloud : research problems in data center networks,” *ACM SIGCOMM computer communication review*, vol. 39, n<sup>o</sup>. 1, p. 68–73, 2008.
- [21] A. L. W. G.-G. D. V. R. Lucchese, J. Olsson, “Energy savings in data centers : A framework for modelling and control of servers’ cooling,” *IFAC World Congress*, 2017.
- [22] L. A. Barroso et U. Hölzle, “The case for energy-proportional computing,” *Computer*, n<sup>o</sup>. 12, p. 33–37, 2007.
- [23] A. P. Bianzino, C. Chaudet, D. Rossi, J.-L. Rougier *et al.*, “A survey of green networking research,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 14, n<sup>o</sup>. 1, p. 3–20, 2012.
- [24] B. Jennings et R. Stadler, “Resource management in clouds : Survey and research challenges,” *Journal of Network and Systems Management*, vol. 23, n<sup>o</sup>. 3, p. 567–619, 2015.
- [25] S. Su, Z. Zhang, X. Cheng, Y. Wang, Y. Luo et J. Wang, “Energy-aware virtual network embedding through consolidation,” dans *Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS), 2012 IEEE Conference on*. IEEE, 2012, p. 127–132.

- [26] M. Pantazoglou, G. Tzortzakis et A. Delis, “Decentralized and energy-efficient workload management in enterprise clouds,” *IEEE Transactions on Cloud Computing*, vol. 4, n° 2, p. 196–209, 2016.
- [27] M. Lin, A. Wierman, L. L. Andrew et E. Thereska, “Dynamic right-sizing for power-proportional data centers,” *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, vol. 21, n° 5, p. 1378–1391, 2013.
- [28] S. S. Manvi et G. K. Shyam, “Resource management for infrastructure as a service (iaas) in cloud computing : A survey,” *Journal of Network and Computer Applications*, vol. 41, p. 424–440, 2014.
- [29] A. Beloglazov, R. Buyya, Y. C. Lee, A. Zomaya *et al.*, “A taxonomy and survey of energy-efficient data centers and cloud computing systems,” *Advances in computers*, vol. 82, n° 2, p. 47–111, 2011.
- [30] S. Mittal, “Power management techniques for data centers : A survey,” *arXiv preprint arXiv :1404.6681*, 2014.
- [31] R. Urgaonkar, U. C. Kozat, K. Igarashi et M. J. Neely, “Dynamic resource allocation and power management in virtualized data centers,” dans *Network Operations and Management Symposium (NOMS), 2010 IEEE*. IEEE, 2010, p. 479–486.
- [32] R. Bolla, R. Bruschi, F. Davoli et F. Cucchietti, “Energy efficiency in the future internet : A survey of existing approaches and trends in energy-aware fixed network infrastructures,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 13, n° 2, p. 223–244, 2011.
- [33] Y. Jiang, “A survey of task allocation and load balancing in distributed systems,” *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 27, n° 2, p. 585–599, 2016.
- [34] Y. Yao, L. Huang, A. Sharma, L. Golubchik et M. Neely, “Data centers power reduction : A two time scale approach for delay tolerant workloads,” dans *INFOCOM, 2012 Proceedings IEEE*. IEEE, 2012, p. 1431–1439.
- [35] Y. Georgiou, D. Glessner, K. Rzaedca et D. Trystram, “A scheduler-level incentive mechanism for energy efficiency in HPC,” dans *Cluster, Cloud and Grid Computing (CCGrid), 2015 15th IEEE/ACM International Symposium on*. IEEE, 2015, p. 617–626.
- [36] L. L. Andrew, M. Lin et A. Wierman, “Optimality, fairness, and robustness in speed scaling designs,” dans *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, vol. 38, n° 1. ACM, 2010, p. 37–48.
- [37] D. Cheng, Y. Guo, C. Jiang et X. Zhou, “Self-tuning batching with dvfs for performance improvement and energy efficiency in internet servers,” *ACM Transactions on Autonomous and Adaptive Systems (TAAS)*, vol. 10, n° 1, p. 6, 2015.

- [38] A. Wierman, L. L. Andrew et A. Tang, “Power-aware speed scaling in processor sharing systems,” dans *INFOCOM 2009, IEEE*. IEEE, 2009, p. 2007–2015.
- [39] M. Dayarathna, Y. Wen et R. Fan, “Data center energy consumption modeling : A survey,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 18, n°. 1, p. 732–794, 2016.
- [40] H. Sun, P. Stolf et J.-M. Pierson, “Spatio-temporal thermal-aware scheduling for homogeneous high-performance computing datacenters,” *Future Generation Computer Systems*, vol. 71, p. 157–170, 2017.
- [41] B. Hadid, S. Lecoeuche, D. Gille et C. Labarre, “Energy efficiency of data centers : A data-driven model-based approach,” dans *Energy Conference (ENERGYCON), 2016 IEEE International*. IEEE, 2016, p. 1–6.
- [42] A. Mousavi, V. Vyatkin, Y. Berezovskaya et X. Zhang, “Cyber-physical design of data centers cooling systems automation,” dans *Trustcom/BigDataSE/ISPA, 2015 IEEE*, vol. 3. IEEE, 2015, p. 254–260.
- [43] —, “Towards energy smart data centers : Simulation of server room cooling system,” dans *Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA), 2015 IEEE 20th Conference on*. IEEE, 2015, p. 1–6.
- [44] S. Weerakkody, Y. Mo, B. Sinopoli, D. Han et L. Shi, “Multi-sensor scheduling for state estimation with event-based, stochastic triggers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, n°. 9, p. 2695–2701, 2016.
- [45] L. Parolini, “Models and control strategies for data center energy efficiency,” Thèse de doctorat, Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA, 2012.
- [46] G. Mencagli et M. Vanneschi, “Towards a systematic approach to the dynamic adaptation of structured parallel computations using model predictive control,” *Cluster computing*, vol. 17, n°. 4, p. 1443–1463, 2014.
- [47] V. Hanumaiah, “Unified framework for energy-proportional computing in multicore processors : Novel algorithms and practical implementation,” Thèse de doctorat, Arizona State University, 2013.
- [48] S. Durand, S. Lesecq, E. Beigné, C. Fabre, L. Vincent et D. Puschini, “Low-cost dynamic voltage and frequency management based upon robust control techniques under thermal constraints,” dans *International Symposium on Formal Methods for Components and Objects*. Springer, 2011, p. 334–353.
- [49] S. Durand et S. Lesecq, “Asynchronous thermal-aware dvfs control,” dans *American Control Conference (ACC), 2013*. IEEE, 2013, p. 4295–4300.
- [50] —, “Nonlinear and asymmetric thermal-aware dvfs control,” dans *Control Conference (ECC), 2013 European*. IEEE, 2013, p. 3240–3245.

- [51] F. Zanini, D. Atienza, C. N. Jones, L. Benini et G. De Micheli, “Online thermal control methods for multiprocessor systems,” *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems (TODAES)*, vol. 18, n<sup>o</sup>. 1, p. 6, 2013.
- [52] L. Soares Indrusiak, P. Dziurzynski et A. K. Singh, “Dynamic resource allocation in embedded, high-performance and cloud computing,” 2016.
- [53] K. De Vogeleer, “La loi de convexité énergie-fréquence de la consommation des programmes : modélisation, thermosensibilité et applications,” Thèse de doctorat, Telecom ParisTech, 2015.
- [54] X. Zhao, T. Peng, X. Qin, Q. Hu, L. Ding et Z. Fang, “Feedback control scheduling in energy-efficient and thermal-aware data centers,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, vol. 46, n<sup>o</sup>. 1, p. 48–60, 2016.
- [55] K. Kawashima, T. Otoshi, Y. Ohsita et M. Murata, “Dynamic placement of virtual network functions based on model predictive control,” dans *Network Operations and Management Symposium (NOMS), 2016 IEEE/IFIP*. IEEE, 2016, p. 1037–1042.
- [56] S. Ihara et F. C. Schweppe, “Physically based modeling of cold load pickup,” *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, n<sup>o</sup>. 9, p. 4142–4150, 1981.
- [57] R. Malhame et C.-Y. Chong, “Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, n<sup>o</sup>. 9, p. 854–860, 1985.
- [58] D. S. Callaway, “Tapping the energy storage potential in electric loads to deliver load following and regulation, with application to wind energy,” *Energy Conversion and Management*, vol. 50, n<sup>o</sup>. 5, p. 1389–1400, 2009.
- [59] S. Bashash et H. K. Fathy, “Modeling and control of aggregate air conditioning loads for robust renewable power management,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, n<sup>o</sup>. 4, p. 1318–1327, 2013.
- [60] N. A. Sinitsyn, S. Kundu et S. Backhaus, “Safe protocols for generating power pulses with heterogeneous populations of thermostatically controlled loads,” *Energy Conversion and Management*, vol. 67, p. 297–308, 2013.
- [61] S. Moura, V. Ruiz et J. Bendsten, “Modeling heterogeneous populations of thermostatically controlled loads using diffusion-advection pdes,” dans *ASME 2013 Dynamic Systems and Control Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2013, p. V002T23A001–V002T23A001.
- [62] J. Bendtsen et S. Sridharan, “Efficient desynchronization of thermostatically controlled loads,” *arXiv preprint arXiv :1302.2384*, 2013.

- [63] S. H. Tindemans, V. Trovato, G. Strbac *et al.*, “Decentralized control of thermostatic loads for flexible demand response,” *IEEE Trans. Contr. Sys. Techn.*, vol. 23, n<sup>o</sup>. 5, p. 1685–1700, 2015.
- [64] D. Angeli et P.-A. Kountouriotis, “A stochastic approach to “dynamic-demand” refrigerator control,” *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 20, n<sup>o</sup>. 3, p. 581–592, 2012.
- [65] L. C. Totu, R. Wisniewski et J. Leth, “Demand response of a tcl population using switching-rate actuation,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, n<sup>o</sup>. 5, p. 1537–1551, 2017.
- [66] Y. Zhang, Y. Jin, J. Yao, G. Zhu et B. Wen, “Power peak shaving with data transmission delays for thermal management in smart buildings,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 14, n<sup>o</sup>. 4, p. 1532–1541, 2018.
- [67] S. A. Abobakr, W. H. Sadid et G. Zhu, “Game-theoretic decentralized model predictive control of thermal appliances in discrete-event systems framework,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, n<sup>o</sup>. 8, p. 6446–6456, 2018.
- [68] W.-J. Ma et V. Gupta, “Desynchronization of thermally-coupled first-order systems using economic model predictive control,” dans *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on.* IEEE, 2012, p. 278–283.
- [69] L. Zhao et W. Zhang, “A unified stochastic hybrid system approach to aggregated load modeling for demand response,” dans *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on.* IEEE, 2015, p. 6668–6673.
- [70] A. Ghaffari, S. Moura et M. Krstić, “Modeling, control, and stability analysis of heterogeneous thermostatically controlled load populations using partial differential equations,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 137, n<sup>o</sup>. 10, p. 101009, 2015.
- [71] C. Le Floch, E. C. Kara et S. Moura, “Pde modeling and control of electric vehicle fleets for ancillary services : A discrete charging case,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 9, n<sup>o</sup>. 2, p. 573–581, 2018.
- [72] A. Alessio, D. Barcelli et A. Bemporad, “Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems,” *Journal of Process Control*, vol. 21, n<sup>o</sup>. 5, p. 705–714, 2011.
- [73] J. Lofberg, “Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab,” dans *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on.* IEEE, 2004, p. 284–289.

- [74] “Intel Processors Junction Temperature, howpublished=<https://ark.intel.com/#@processors>, urldate = 2018-11-14, author = Intel.”
- [75] M. Ghanavati et A. Chakravarthy, “Demand-side energy management by use of a design-then-approximate controller for aggregated thermostatic loads,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, n°. 4, p. 1439–1448, 2018.